

Homologia em Superfícies

Marcos Agnoletto Forte

Profa. Dra. Mariana Rodrigues da Silveiro



Universidade Federal do ABC

1 Parte 1	4
1.1 Conceitos Básicos	4
1.2 Campos Vetoriais	9
1.3 Homologia plana e o teorema da curva de Jordan	18
2 Parte 2	31
2.1 Complexos	31
2.2 Superfícies	33
2.3 Triangulação	36
2.4 Classificação de superfícies	40
2.5 Invariantes topológicos	44
2.6 Grafos	45
2.7 A característica de Euler e o problema de colorir mapas	48
2.8 A álgebra de cadeias	51
2.9 Complexos simpliciais	55
2.10 Grupos de homologia	57
2.11 Números de Betti e a característica de Euler	62
2.12 Invariância da homologia para superfícies	64

Introdução, objetivos e metodologia

Este projeto faz uma introdução à topologia algébrica com abordagem introdutória e intuitiva, utilizando o apelo geométrico. Para isso, vamos nos restringir ao estudo das superfícies, que podem ser facilmente visualizadas, dando-nos intuição geométrica e reduzindo a natureza abstrata da topologia algébrica a um nível acessível a um aluno de graduação. A principal bibliografia utilizada será [5] e [7]. Também usaremos [1], [2], [3], [4], [6], [8] e [9] como bibliografia complementar. Além de aplicações interessantes, este é um dos únicos assuntos que permitem que um estudante ainda na graduação veja as três grandes áreas da matemática - geometria, análise e álgebra - trabalhando juntas em harmonia para resolver importantes problemas, como o Teorema da curva de Jordan e o Teorema das quatro cores.

O objetivo deste projeto é a apresentação dos grupos de homologia. Existem várias formas diferentes de se definir os grupos de homologia. Estudaremos os grupos de homologia simplicial, que foram os primeiros historicamente e são conceitualmente mais simples e concretos, além de mais fáceis de se calcular.

A metodologia a ser empregada é a usual na área de Matemática: estudo individual (leitura e resolução de exercícios), discussões semanais com a orientadora e apresentações de seminários periodicamente sobre o conteúdo estudado.

Palavras Chaves: Topologia algébrica, curva de Jordan, quatro cores

1.1 Conceitos Básicos

Nesta seção, introduziremos os conceitos de célula, complexos e outros conceitos no plano.

Definição 1.1 Usando coordenadas cartesianas no plano podemos associar um ponto P a um par de números $P = (x, y)$. Dados dois pontos $P = (x, y)$ e $Q = (z, w)$ definimos a soma como

$$P \oplus Q = (x + z, y + w)$$

o produto de um ponto P por um escalar λ como

$$\lambda \odot P = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

e a norma de um ponto P como

$$\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observação 1.2 A norma de um ponto é a distância euclidiana do ponto à origem. Usando a norma podemos expressar a distância entre dois pontos P e Q como $\|P - Q\|$.

Definição 1.3 Seja P um ponto e A um subconjunto do plano. Uma vizinhança de P é qualquer disco circular (sem a fronteira) que contém P . Dizemos que P está próximo ao conjunto A se toda vizinhança de P contiver pelo menos um ponto de A .

Se P está próximo de A escrevemos $P \leftarrow A$. Agora, podemos definir transformações contínuas como transformações que preservam relações de vizinhanças.

Definição 1.4 Uma transformação contínua de um subconjunto D do plano em outro subconjunto R é uma função f com domínio D e imagem R de modo que para cada ponto $P \in D$ e conjunto $A \subset D$, se P está próximo de A , então $f(P)$ está próximo de $f[A] = \{f(Q) : Q \in A\}$.

Definição 1.5 A transformação identidade Id é a transformação $Id(P) = P$. Uma transformação $u : D \rightarrow R$ é chamada de invertível se existe uma transformação $v : R \rightarrow D$ tal que $v \circ u = Id$. A transformação v é chamada de uma inversa para u .

Definição 1.6 Uma transformação topológica no plano é uma transformação contínua que tem uma transformação inversa contínua. Dois subconjuntos do plano são chamados topologicamente equivalentes se existir uma transformação topológica entre eles.

Definição 1.7 Uma célula é qualquer figura topologicamente equivalente a um disco fechado. Como ilustra a Figura (1.1).

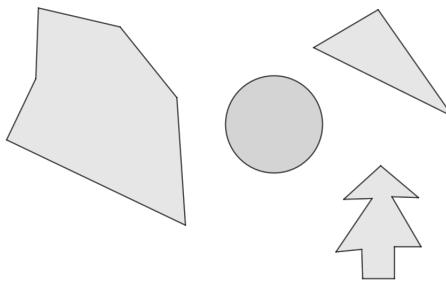


Figura 1.1: Exemplos de células

Observação 1.8 Subconjuntos do plano são ditos topologicamente equivalentes quando qualquer uma delas pode ser continuamente transformada em outra, ou seja, transformações que não envolvem "rasgar" ou "cortar".

Definição 1.9 Propriedade topológica é definida como uma propriedade de um subconjunto do plano que é invariante sobre a uma transformação contínua.

Definição 1.10 Um complexo é qualquer subconjunto do plano composto de mais de uma célula, de modo que, um complexo é construído à partir da colagem dos lados de duas células.

Definição 1.11 Defina polígono como uma célula na qual um finito número de pontos em sua fronteira são escolhidos como vértices. As seções na fronteira entre dois vértices serão chamados de lados.

Chamaremos de **n-gono** um polígono que possui **n** lados.

Definição 1.12 Um poliedro é um complexo que é topologicamente equivalente a uma esfera.

Definição 1.13 Uma curva é qualquer subconjunto do plano topologicamente equivalente a um segmento de reta $L = \{(x, y) : y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1\}$ e uma curva fechada (ou curva de Jordan) é qualquer subconjunto do plano topologicamente equivalente a um círculo.

Definição 1.14 Sejam $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \dots\}$ uma sequência de pontos no plano e P um ponto qualquer. O ponto P está próximo da sequência \mathbb{P} se $P = P_n$ para um número infinito de termos da sequência ou $P = P_n$ para um número finito de termos da sequência e P está próximo do conjunto de pontos formado pelos termos da sequência.

Observação 1.15 Proximidade a sequências pode ser usada para caracterizar funções contínuas da mesma maneira que proximidade a conjuntos.

Teorema 1.16 Dados D e R subconjuntos do plano, uma função $f : D \rightarrow R$ é contínua se, e somente se, para qualquer ponto P próximo a sequência $\mathbb{P} = \{P_n\}$ em D teremos que $f(P)$ está próximo da sequência $f(\mathbb{P})$ em R .

Demonstração: (\implies) Seja $f : D \rightarrow R$ uma transformação contínua, então por definição temos que dado um ponto $P \in D$ e um conjunto $A \subset D$ segue que se $P \leftarrow A$, então $f(P) \leftarrow f[A]$. Considere A o conjunto dos pontos da sequência \mathbb{P} e a prova segue.

(\impliedby) Sejam $f : D \rightarrow R$ uma função, P um ponto tal que $P \in D$ e A um conjunto formado pelos pontos de \mathbb{P} . Segue, por hipótese, que se $P \leftarrow A$, então $f(P) \leftarrow f[A]$. Donde segue que f é contínua. \square

Definição 1.17 Um conjunto S do plano é compacto se toda sequência em S tem um ponto próximo de S .

Definição 1.18 Um conjunto é limitado se ele está contido em um retângulo $R = \{(x, y), m_1 \leq x \leq n_1 \text{ e } m_2 \leq y \leq n_2\}$, para quaisquer $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ e um conjunto é fechado se ele contém todos os seus pontos próximos.

Compacidade é uma propriedade topológica (cf. [9]).

Teorema 1.19 (Bolzano-Weierstrass) Células são compactas.

Demonstração: Seja D um disco. Segue que o intervalo $[0, 1]$ é compacto (cf. [9]). Disto segue que o quadrado é compacto, pois o produto de compactos é compactos. Como o quadrado é topologicamente equivalente ao disco, temos que o disco é compacto. Como células são subconjuntos do plano topologicamente equivalentes a um disco, temos que células são compactas. \square

Corolário 1.20 Um subconjunto do plano S é compacto se, e somente se, S é fechado e limitado.

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que S não é limitado, então S não está contido num retângulo. Em particular, para cada retângulo R_n centrado na origem existe um ponto P_n em S , mas fora de R_n . Então a sequência $\mathbb{P} = \{P_n\}$ não tem ponto próximo em S . Portanto, S não é compacto. Suponha que S não é fechado, então, por definição, existe um ponto próximo a S que não está em S . Portanto, S não é compacto.

(\Leftarrow) Seja S um conjunto fechado e limitado. Como S é limitado e fechado, ele está contido em um retângulo R , note que R é uma célula e, pelo teorema anterior, compacto. Note também, que podemos transformar topologicamente o retângulo R no conjunto S e, como compacidade é uma propriedade topológica, temos que S é compacto. \square

Definição 1.21 Um subconjunto do plano S é conexo se sempre que S for dividido em dois subconjuntos disjuntos não-vazios A e B , um desses conjuntos sempre contém um ponto próximo ao outro.

Observação 1.22 Conexidade é uma propriedade topológica. Seja X um espaço topológico. É fácil ver que X é desconexo se, e somente se, existem $U, V \subset X$ abertos não vazios e disjuntos tais que $X = U \cup V$.

Observação 1.23 Vamos mostrar que \mathbb{R} é conexo. Por absurdo, suponha que \mathbb{R} seja desconexo. Existem $U, V \subset \mathbb{R}$ abertos, não vazios, disjuntos tais que $\mathbb{R} = U \cup V$. Tome $a \in U$ e $b \in V$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a < b$. Considere $S = \{x \in [a, b] : [a, x] \subset U\}$. Temos que $S \neq \emptyset$, pois $a \in S$. Além disso, S é limitado superiormente (por b , por exemplo). Portanto, existe $s = \sup S$.

Note que $s \notin V$, pois se $s \in V$, existiria $\epsilon > 0$ tal que $]s - \epsilon, s + \epsilon[\subset V$, pois V é aberto em \mathbb{R} . Como $s = \sup S$, temos que $s - \epsilon$ não é cota superior de S . Logo, existe $x \in S$ tal que $s - \epsilon < x \leq s$. Logo, $x \in U \cap V$. Contudo, isto não ocorre, pois $U \cap V = \emptyset$. Portanto, $s \notin V$. Como $\mathbb{R} = U \cup V$ e $s \notin V$, temos que $s \in U$. Usando o fato que U é aberto em \mathbb{R} , tomamos $\delta > 0$ tal que $]s - \delta, s + \delta[\subset U$ e $s + \delta < b$. Tome $y \in S$ tal que $s - \delta < y \leq s$. Tomemos que $[a, s + \frac{\delta}{2}] = [a, y] \cup [y, s + \frac{\delta}{2}] \subset U$. Portanto, $s + \frac{\delta}{2} \in S$. Absurdo, pois s é cota superior de S . Logo, \mathbb{R} é conexo.

Teorema 1.24 Curvas são conexas.

Demonstração: Seja $C = \{(x, y) : y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1\}$ um segmento de reta. Segue da Observação (1.23) que o intervalo C é conexo. Como conexidade é uma propriedade topológica, qualquer subconjunto do plano topologicamente equivalente ao segmento C é conexo. Como, por definição, curvas são subconjuntos do plano topologicamente equivalentes ao segmento C , temos que curvas são conexas. \square

Definição 1.25 Um espaço topológico é um conjunto τ junto com uma classe N de subconjuntos de τ de modo que:

- (a) Cada ponto P de τ está em algum elemento de N . Os elementos de N que contém P são chamados vizinhanças de P .
- (b) Toda intersecção de duas vizinhanças de um ponto P contém uma vizinhança.

Vamos agora generalizar os conceitos de proximidade e conjuntos fechados para espaços topológicos.

Definição 1.26 Sejam τ um espaço topológico, A um subconjunto de τ e P um ponto de τ . P está próximo de A , escrevemos $P \leftarrow A$, se toda vizinhança de P contém um ponto de distinto de P . P está próximo da sequência $\{P_n\}$ se $P = P_n$ para infinitos valores de n ou P está próximo de um conjunto de infinitos pontos dessa sequência.

Definição 1.27 Seja τ um espaço topológico e A um subconjunto de τ . A é fechado se A contém todos os pontos próximos a ele. A é aberto se todo ponto em A não está não está próximo a $\tau \setminus A$. Compacto se toda sequência de A tem um ponto próximo em A e conexo se sempre que A é separado em duas partes disjuntas não-vazias, então uma dessas partes contém um ponto próximo a outra parte. Associado a cada conjunto A existe o interior de A que consiste de todos os ponto de A que não estão em $\tau \setminus A$ e nem próximos de $\tau \setminus A$, o fecho de A consiste dos pontos de A junto com os pontos próximos a A e a fronteira de A consiste nos pontos próximos a A e a $\tau \setminus A$.

Definição 1.28 Sejam τ e κ espaços topológicos. A transformação $f : \tau \rightarrow \kappa$ é contínua de para cada ponto P de τ e subconjunto A de τ tais que $P \leftarrow A$, então $f(P) \leftarrow f[A]$.

Uma transformação topológica é uma transformação contínua, invertível e que tem inversa contínua. Dois espaços topológicos são topologicamente equivalentes se existe uma transformação topológica entre eles.

1.2 Campos Vetoriais

Definição 1.29 Um campo vetorial V em um subconjunto D do plano é uma função que associa a cada $P \in D$ um vetor no plano com a origem em P . Assim, se $P = (x, y)$ então $V(P)$ pode ser descrito da seguinte maneira

$$V(P) = (F(x, y), G(x, y)),$$

onde F e G são funções a valores reais de P .

Um campo vetorial $V(P)$ é contínuo quando as funções F e G forem contínuas de acordo com o que foi definido em (1.29).

Observação 1.30 Dado V um campo vetorial em D , podemos definir uma função da seguinte maneira

$$f(P) = P + V(P) = (x + F(x, y), y + G(x, y)).$$

Definição 1.31 Seja $f : D \rightarrow D$ uma transformação contínua sobre uma região D do plano. Se $f(P) = P$, para algum $P \in D$, dizemos que P é um ponto fixo de f e que f possui a propriedade do ponto fixo. Se toda transformação contínua $f : D \rightarrow D$ tiver a propriedade do ponto fixo, então dizemos que D tem a propriedade do ponto fixo.

A propriedade do ponto fixo é uma propriedade topológica (cf. [9]).

Definição 1.32 Uma triangulação de um triângulo D (ou qualquer outro polígono) é uma divisão de D em um número finito de triângulos de modo que cada aresta da fronteira de D é a aresta de somente um triângulo da divisão e cada aresta no interior de D é o lado de exatamente dois triângulos da divisão. Como ilustra a Figura (1.2).

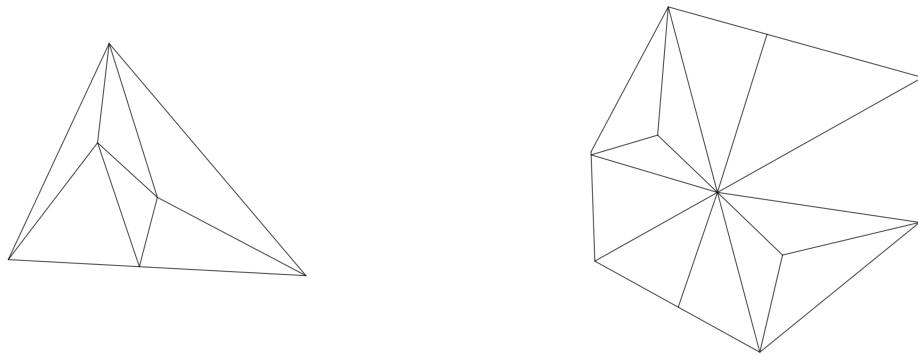


Figura 1.2: Exemplos de Triangulações

Dados um triângulo D e uma triangulação de D , descreveremos uma forma de rotular os vértices dessa triangulação.

Definição 1.33 Sejam D um triângulo e considere em D uma triangulação. Uma rotulagem de Sperner é uma atribuição de rótulos aos vértices dos triângulos dessa triangulação. Primeiramente, os vértices de D serão rotulados com rótulos diferentes. Posteriormente, os vértices dos triângulos da triangulação que pertencem aos lados da fronteira de D serão rotulados somente com os rótulos iguais aos das extremidades do lado ao que pertencem. Por último, os vértices no interior de D serão rotulados de qualquer maneira, entretanto só podem ser usados os rótulos utilizados nos vértices de D . Como ilustra a Figura (1.3).

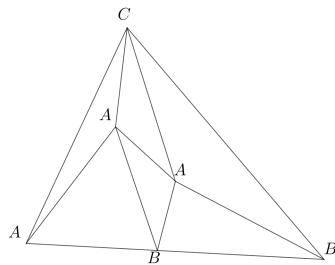


Figura 1.3: Exemplos de Rotulagem de Sperner

Definição 1.34 Um triângulo (segmento) cujos vértices possuem rótulos diferentes são chamados de triângulos (segmentos) completos. Como ilustra a Figura (1.4).

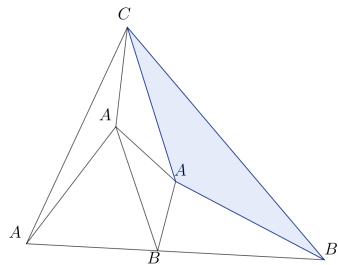


Figura 1.4: Exemplos de Triângulo Completo (em azul)

O Lema a seguir garante a existência de triângulos completos.

Lema 1.35 Seja D um triângulo no plano e T uma triangulação de D . Temos que para uma rotulagem de Sperner da triangulação T existe pelo menos um triângulo completo.

Demonstração: Provaremos que o número de triângulos completos é ímpar. Considere, inicialmente, o problema análogo em uma dimensão. Um segmentos de reta

1 Parte 1

com rótulos A e B , dividido em um número finito de segmentos, cujos vértices são rotulados somente com A 's e B 's. Nós devemos provar que o número de segmentos completos, que denotaremos por b , é um número ímpar. Seja a o número de segmentos com dois rótulos A . Assim, o número $2.a + b$ é o dobro do número de vértices com o rótulo A . Seja c o número de vértices com rótulo A no interior do segmento. Então

$$2.a + b = 2.c + 1$$

Consequentemente

$$b = 2.(c - a) + 1$$

Portanto, o número de segmentos completos b é ímpar. Retornando para o problema em duas dimensões, queremos mostrar que o número de triângulos completos b é ímpar. Seja a o número de triângulos cujos vértices são rotulados com ABA ou BAB . Assim, o número $2.a + b$ é o dobro do número de lados com vértices cujos rótulos são A e B . Seja c o número de lados cujos vértices são rotulados com A e B no interior do triângulo original e d o número de segmentos na fronteira do triângulo original cujos vértices são rotulados com A e B . Então

$$2.a + b = 2.c + d$$

Consequentemente

$$b = 2.(c - a) + d$$

Como provamos na primeira parte que o número de segmentos completos d é ímpar, segue que o número de triângulos completos b é ímpar. \square

Definição 1.36 *Considere um sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$$

determinado por um campo vetorial contínuo $V(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ em alguma região D do plano. O conjunto de soluções desse sistema formam uma família de curvas direcionadas no plano, chamadas curvas integrais do sistema.

As curvas integrais de um sistema de equações diferenciais têm tangentes em cada ponto P . A figura formada por essas curvas são chamadas de retratos de fase do sistema de equações diferenciais. Existe um conjunto de pontos chamados de pontos

críticos, onde $V(P) = 0$ e ao redor deles as curvas integrais se reúnem.

Teorema 1.37 (Teorema do ponto fixo de Brouwer) Células têm a propriedade do ponto fixo.

Demonstração: Seja D uma célula no plano. Como uma célula a propriedade do ponto fixo é uma propriedade topológica se provarmos que um triângulo possui a propriedade do ponto fixo, provaremos que células possuem a propriedade do ponto fixo. Seja $f : D \rightarrow D$ uma transformação contínua e V um campo de vetores correspondente a f , ou seja,

$$f(P) = P + V(P)$$

Se encontrarmos um ponto P tal que $V(P) = 0$, esse ponto possui a propriedade do ponto fixo, pois

$$f(P) = P + V(P) = P + 0 = P$$

Sem perda de generalidade, considere um triângulo D que tem um vértice no eixo leste, outro no eixo oeste e outro no eixo norte. Como ilustra Figura (1.5).

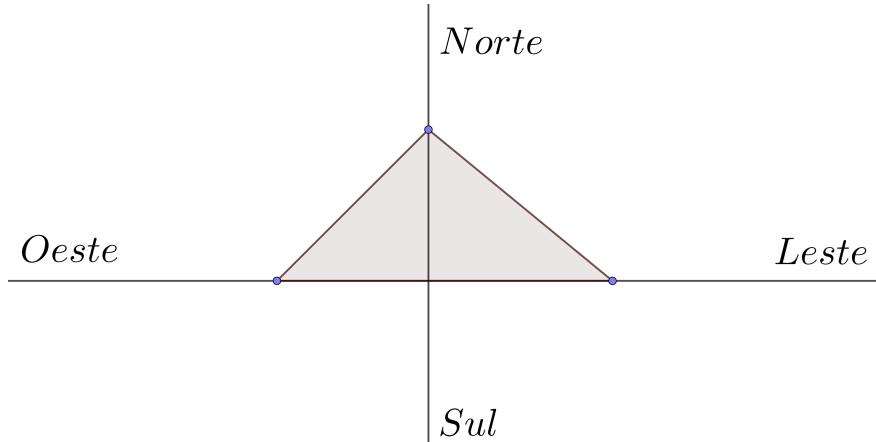


Figura 1.5: Localização dos pontos nos eixos

Para esta demonstração, consideraremos uma divisão do plano em três regiões: nordeste, noroeste e sul, como ilustra a Figura (1.6).

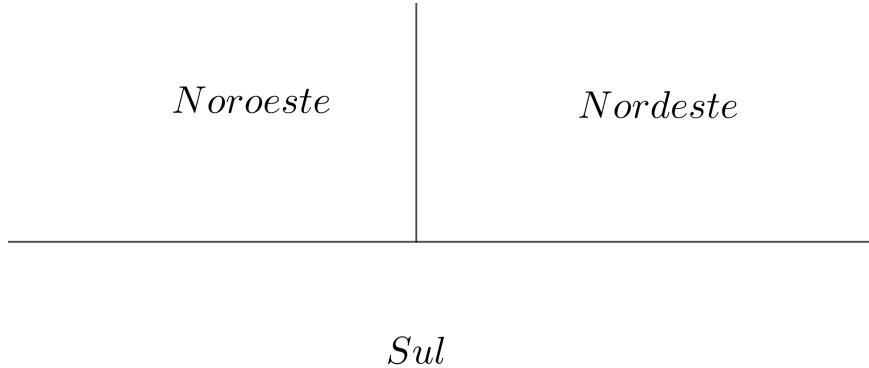


Figura 1.6: As três direções do plano

Para o triângulo D , rotule cada vértice de acordo com a direção do vetor desse respectivo vértice. Existem três situações, nas quais um vetor aponta para duas direções: os vetores que apontam para leste, oeste e norte no sentido usual. Para pontos que tem o vetor apontando para norte e leste, defina a direção como nordeste e para pontos que têm o vetor apontando para o oeste, defina a direção como noroeste. Note que, o único ponto que aponta para todas as direções é o vetor nulo. O vértice no eixo oeste, que tem o seu vetor apontando para o nordeste, será rotulado como P_1 ; o vetor no eixo leste; que tem o vetor apontando para o noroeste, será rotulado com Q_1 ; e o vértice no eixo norte, que tem o vetor apontando para o sul, defina o rótulo R_1 . Seja a triangulação T_1 sobre o triângulo D . Rotule os vértices P_1 , Q_1 e R_1 por A , B e C , respectivamente. Posteriormente, considere uma rotulagem de Sperner sobre os triângulos de T_1 de modo que os pontos A tenham seu respectivo vetor apontando para o nordeste, os pontos B tenham seu respectivo vetor apontando para o noroeste e os pontos C tenham seu respectivo vetor apontando para o sul. Pelo Lema (1.35) segue que existe pelo menos um triângulo completo. Sem perda de generalidade, seja D_1 um triângulo completo de T_1 . Renomeie os seus vértices A , B e C para P_2 , Q_2 e R_2 . Posteriormente, aplique uma triangulação T_2 sobre D_1 e repita o processo de rotulagem. Repita esse processo e note que os lados dos triângulos completos tendem a zero. Por construção, D contém uma sequência de triângulos completos e as sequências $\mathbb{P} = \{P_n\}$, $\mathbb{Q} = \{Q_n\}$ e $\mathbb{R} = \{R_n\}$ de vértices que têm seus vetores apontando somente para o nordeste, noroeste e sul, respectivamente. Pela compacidade de D existe um ponto $P \in D$ tal que $\mathbb{P} \rightarrow P$. Como os lados dos triângulos ficam arbitrariamente pequenos a sequência \mathbb{P} fica arbitrariamente próxima de \mathbb{Q} e \mathbb{R} , segue daí que $\mathbb{Q} \rightarrow P$ e $\mathbb{R} \rightarrow P$. Como V é um campo vetorial contínuo e $\mathbb{P} \rightarrow P$, temos que $V(\mathbb{P}) \rightarrow V(P)$, assim como os vetores $V(\mathbb{Q})$

e $V(\mathbb{R})$. Como \mathbb{P} é uma sequência de pontos cujos $V(\mathbb{P})$ estão na direção nordeste e $V(\mathbb{P}) \rightarrow P$, temos que P é um ponto cujo $V(P)$ aponta para o nordeste também. Analogamente, para \mathbb{Q} e \mathbb{R} concluímos que P é um ponto cujo $V(P)$ aponta para noroeste e sul, respectivamente. Assim, como o vetor nulo é o único que está nas três direções, então $V(P) = 0$. \square

Lema 1.38 *Seja D qualquer conjunto compacto juntamente com um campo vetorial V . Se V é sempre diferente de zero em D , então existe uma constante $\epsilon > 0$ de modo que todo triângulo completo com vértices em D tem o comprimento de um lado maior que ϵ .*

Demonstração: Contra-positiva do Teorema (1.37). \square

Sejam uma célula na forma de um polígono com qualquer número de lados e uma triangulação para essa célula tal que todos os vértices possuam somente rótulos A , B e C . Considere \mathcal{C} o número de triângulos completos contado com orientação, ou seja, cada triângulo completo contribui com $+1$ se os rótulos ABC são dispostos nessa ordem no sentido anti-horário ao redor do triângulo, mas cada triângulo completo contribui com -1 se os rótulos ABC são dispostos nessa ordem no sentido horário ao longo do triângulo. Considere também \mathcal{I} o número de segmentos completos (com rótulos AB) na fronteira do polígono contados com orientação, ou seja, cada segmento completo contribui com $+1$ se os rótulos AB são dispostos nessa ordem no sentido anti-horário ao redor do polígono, mas cada segmento completo contribui com -1 se os rótulos AB são dispostos nessa ordem no sentido horário ao longo do polígono. Como ilustram a Figura (1.7) e a Figura (1.8).

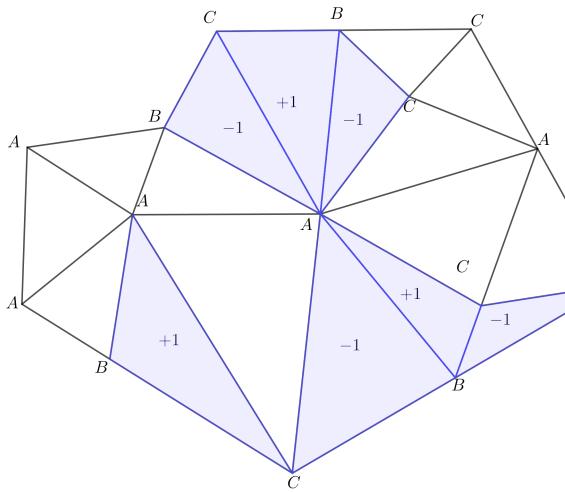


Figura 1.7: Ilustração do número \mathcal{C}

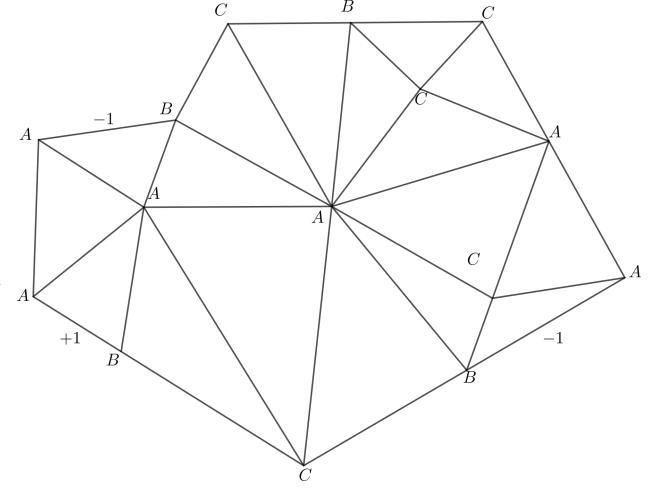


Figura 1.8: Ilustração do número \mathcal{I}

Teorema 1.39 $\mathcal{C} = \mathcal{I}$

Demonstração: Seja \mathcal{S} o número de arestas com rótulo AB na fronteira do polígono e nos triângulos da triangulação do mesmo, contados da seguinte maneira: cada triângulo é considerado à parte dos demais e seus lados AB são contados como ± 1 de acordo com a orientação do triângulo a que ele pertence. Note que um triângulo completo contribui com ± 1 para \mathcal{C} dependendo de sua orientação e ao mesmo tempo contribui com ± 1 para \mathcal{S} dependendo da orientação, como a orientação é a mesma para ambos, a contribuição é igual para ambos. Note também, que um triângulo do tipo ABA contribui com 0 para \mathcal{S} , pois possui um lado com orientação positiva e outro com orientação negativa e também contribui 0 para \mathcal{C} , pois ABA não é um triângulo completo. Analogamente, obtemos o mesmo resultado para os triângulos ABB . Portanto, $\mathcal{C} = \mathcal{S}$. Por outro lado, considere um lado com rótulo AB . Se esse lado estiver no interior do polígono ele pertence a dois triângulos que contribuem com $+1$ e -1 para \mathcal{S} , considerando todos os segmentos com rótulos AB no interior, temos que eles contribuem 0 para \mathcal{S} . Portanto, os únicos segmentos que contribuem para \mathcal{S} são os mesmos que contribuem para \mathcal{I} e como os segmentos possuem a mesma orientação, temos que $\mathcal{S} = \mathcal{I}$. Consequentemente, $\mathcal{C} = \mathcal{S} = \mathcal{I}$. \square

Definição 1.40 Considere um campo vetorial contínuo V em uma curva fechada γ tal que V não se anula em γ . Seja Q um ponto fixado em γ , e suponha que o ponto P percorra a curva γ , partindo de Q no sentido anti-horário. Ao retornar ao ponto Q o vetor $V(P)$ fará um determinado número de revoluções que serão contadas da seguinte maneira: $+1$ se a revolução for no sentido anti-horário e -1 se a revolução for no sentido horário. O resultado algébrico dessa contagem é chamado de **winding number** de V sobre γ e é denotado por $W(\gamma)$. Como ilustra a Figura (1.9).

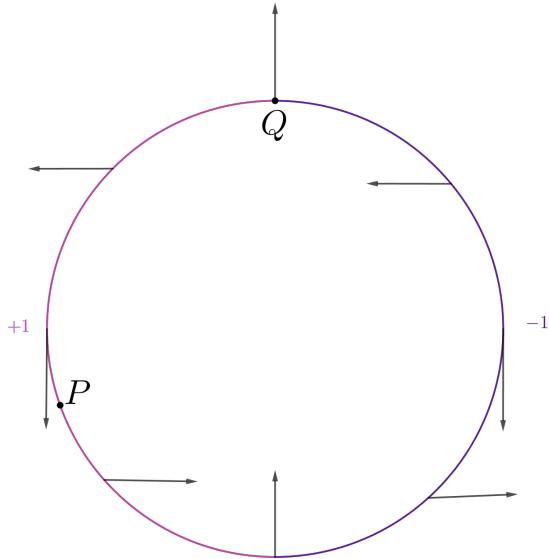


Figura 1.9: Ilustração do winding number

Observação 1.41 Uma forma alternativa para calcular o winding number de V sobre γ (ao invés de contar o número de revoluções de $V(P)$) é escolher uma direção aleatória e selecionar os pontos P de γ tais que $V(P)$ tenha a direção escolhida. Então, contaremos da seguinte maneira: $+1$ se $V(P)$ passar na direção escolhida no sentido anti-horário, -1 se $V(P)$ passar na direção escolhida no sentido anti-horário e 0 se $V(P)$ não completar uma revolução completa.

Observação 1.42 Seja $\{P_i\}_{i=1}^n$ um conjunto finito de pontos de γ . Como $\{P_i\}$ divide γ em um número finito de lados, chamaremos $\{P_i\}$ de partição de γ . Rotule os pontos da partição de γ de acordo com a direção dos vetores $V(P_i)$ considerando a divisão do plano em três regiões: sul (C), noroeste (B) e nordeste (A). Agora, se os pontos $\{P_i\}$ tiverem sido escolhidos suficientemente próximos uns dos outros, quando o vetor $V(P)$ passar ao longo da direção norte no sentido anti-horário um lado com rótulo AB irá aparecer e quando o vetor $V(P)$ passar ao longo da direção norte no sentido horário um lado com rótulo BA irá aparecer. Assim, o winding number coincide com o índice \mathcal{I} .

Definição 1.43 Dizemos que a divisão $\{P_i\}_{i=1}^n$ de γ é ϵ -densa se qualquer ponto inserido entre dois pontos da divisão estiver a uma distância menor do que ϵ dos pontos de cada lado.

Teorema 1.44 Tome um campo vetorial contínuo V definido sobre uma curva fechada γ e suponha que $V(P) \neq 0, \forall P \in \gamma$. Para quaisquer divisões $\mathbb{P} = \{P_i\}$ e $\mathbb{R} = \{R_i\}$ de γ , sejam $\mathcal{I}(\mathbb{P})$ e $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ os índices do \mathbb{P} e \mathbb{R} rotulados de acordo com a direção dos vetores V

nos vértices de \mathbb{P} e \mathbb{R} . Então, existe uma constante $\epsilon > 0$ de modo que se \mathbb{P} e \mathbb{R} são duas divisões ϵ -densas de γ , então $\mathcal{I}(\mathbb{P}) = \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

Demonstração: Podemos aplicar o Lema (1.38) à curva γ , pois curvas fechadas são compactas. Então existe uma constante $\epsilon > 0$ tal que todo triângulo completo com vértices em γ tem lado maior que ϵ . Sejam $\mathbb{P} = \{P_i\}$ e $\mathbb{R} = \{R_i\}$ duas divisões ϵ -densas de γ . Note que ao adicionarmos um ponto a qualquer divisão ϵ -densa não altera o seu índice \mathcal{I} . Portanto, seja $\mathbb{S} = \mathbb{P} \cup \mathbb{R}$. Consequentemente, temos que $\mathcal{I}(\mathbb{P}) = \mathcal{I}(\mathbb{S})$ e $\mathcal{I}(\mathbb{R}) = \mathcal{I}(\mathbb{S})$. Logo, $\mathcal{I}(\mathbb{P}) = \mathcal{I}(\mathbb{R})$. \square

Dada uma curva fechada γ e um campo vetorial contínuo V tal que $V(P) \neq 0, \forall P \in \gamma$, o winding number de V em γ é único para qualquer rotulagem do polígono obtido para qualquer divisão ϵ -densa de γ , onde ϵ é a constante do Teorema (1.44).

Teorema 1.45 *Seja \mathbb{D} uma célula com uma curva fechada γ bordo. Se um campo vetorial contínuo V nunca é zero em \mathbb{D} , então $W(\gamma) = 0$.*

Demonstração: Aplique o Lema (1.38) em \mathbb{D} . Como V nunca é zero em \mathbb{D} , existe um $\epsilon > 0$ tal que todo triângulo completo com vértices em \mathbb{D} tem lados maiores que ϵ . Escolha uma divisão de γ ϵ -densa. Por definição, o índice dessa divisão é o winding number de V em γ . Unindo essa divisão com a triangulação de \mathbb{D} , pelo Teorema (1.39) $\mathcal{C} = \mathcal{I}$. Note que, podemos adicionar pontos a triangulação de \mathbb{D} de tal modo que a distância entre dois vértices seja sempre menor que ϵ . Portanto $\mathcal{C} = 0$. Consequentemente, $W(\gamma) = 0$. \square

Teorema 1.46 *Sejam V um campo vetorial contínuo, \mathbb{D} uma célula e γ sua fronteira. Suponha que V não é zero em γ , então*

$$W(\gamma) = \mathcal{I}(P_1) + \cdots + \mathcal{I}(P_n),$$

onde P_1, \dots, P_n são pontos críticos de V em \mathbb{D} .

Demonstração: Considere P_1, \dots, P_n pontos críticos de V em \mathbb{D} . Ao redor de cada P_i , construa um círculo γ_i que contenha somente um ponto crítico, nesse caso P_i . Construa, agora, curvas entre γ_i e γ , dividindo \mathbb{D} em \mathbb{D}_k células e, então, aplique o Teorema (1.45). Consequentemente

$$\begin{aligned} W(\gamma) &= W(\gamma_1) + \cdots + W(\gamma_n) \\ &= \mathcal{I}(P_1) + \cdots + \mathcal{I}(P_n). \end{aligned}$$

\square

1.3 Homologia plana e o teorema da curva de Jordan

Definição 1.47 Uma cadeia poligonal é um subconjunto do plano formado por uma sequência finita de segmentos de retas paralelos aos eixos coordenados, sendo que cada segmento compartilha os pontos finais com os outros segmentos da sequência. Como ilustra Figura (1.10).

cadeia poligonais têm dois pontos finais. Dados dois pontos P e Q , se existe uma cadeia com pontos finais P e Q , dizemos que P e Q são conectados por uma cadeia.

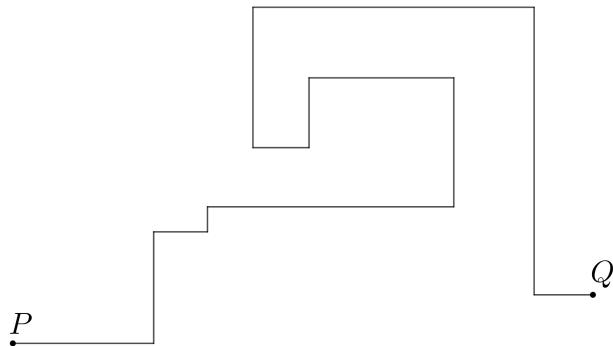


Figura 1.10: Exemplo de cadeia

Definição 1.48 Dizemos que um espaço topológico X é conexo por caminhos se para quaisquer $x, y \in X$ existe uma cadeia poligonal ligando tais pontos.

Proposição 1.49 Um espaço topológico X é conexo por caminhos se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ existe uma $f : [0, 1] \rightarrow X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

Teorema 1.50 Seja G um conjunto aberto. Então G é conexo se, e somente se, G é conexo por caminhos.

Demonstração: (\implies) Suponha, por absurdo, que existem dois pontos $P, Q \in G$ que não podem ser conectados por um caminho. Considere V o conjunto dos pontos que podem se conectar a P por um caminho e considere, também, $G \setminus V$. Note que

- $V \neq \emptyset$, pois $P \in V$;
- $G \setminus V \neq \emptyset$, pois $Q \in G \setminus V$;

- $G = V \cup (G \setminus V)$.

Vamos mostrar que V e $G \setminus V$ são abertos. E daí chegamos a um absurdo, pois G é conexo por hipótese.

- **V é aberto:**

De fato, seja $P' \in V$, então $P' \in G$ e como, por hipótese, G é aberto, existe uma vizinhança aberta $V_{P'}$ de P' tal que P'' pode ser conectado a P' por uma poligonal γ_1 , mas como P' pode ser conectado a P por uma poligonal γ_0 , pois $P' \in V$. Então, P'' pode ser conectado a P por uma poligonal $\gamma_0 \cup \gamma_1$. Consequentemente, $P'' \in V$. Como P'' é arbitrário segue que $V_{P'} \subset V$, logo V é aberto.

- **$G \setminus V$ é aberto:**

De fato, seja $Q' \in G \setminus V$, então $Q' \in G$, e como G é aberto por hipótese, existe uma vizinhança aberta $V_{Q'}$ de Q' tal que $Q' \in V_{Q'} \subset G$. Considere agora $Q'' \in V_{Q'}$, note que Q'' pode ser conectado a Q' por uma poligonal γ_1 . Suponha, por absurdo, que Q'' possa se conectar a P por uma poligonal γ_0 , então Q' pode se conectar a P pela poligonal $\gamma_0 \cup \gamma_1$. Absurdo, pois $Q' \in G \setminus V$. Consequentemente, $Q'' \in G \setminus V$. Como Q'' é arbitrário, segue que $V_{Q'} \subset G \setminus V$, logo $G \setminus V$ é aberto.

(\Leftarrow) Suponha, por absurdo, que G não é conexo. Então existem $U, V \subset G$ abertos não vazios, disjuntos tais que $G = U \cup V$. Tome $x \in U$ e $y \in V$. Como G é conexo por caminhos, existe $f : [0, 1] \rightarrow G$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Como f é contínua, $f^{-1}[U]$ e $f^{-1}[V]$ são abertos em $[0, 1]$. Temos que $f^{-1}[U] \neq \emptyset$ e $f^{-1}[V] \neq \emptyset$. Além disso, $f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V] = \emptyset$, pois $U \cap V = \emptyset$. Por fim, $f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V] = [0, 1]$. Disto segue que $[0, 1]$ é desconexo. Absurdo, pela Observação (1.23). \square

Definição 1.51 Uma grade \mathcal{G} é uma porção retangular do plano com lados paralelos aos eixos coordenados e com um número finito de segmentos de reta adicionadas ao longo do retângulo paralelas aos lados.

As intersecções de segmentos de reta dentro de uma grade são chamadas *vértices*. Os segmentos de reta dentro de uma grade entre dois vértices são chamados *arestas*. As regiões dentro de uma grade entre um conjunto de arestas são chamadas *faces*.

Observação 1.52 Como triangulações, grades são um tipo de complexos.

A terminologia adotada acima são boas para um contato intuitivo com o estudo de grades, entretanto adotaremos uma terminologia que simplificará o estudo geral da homologia.

Definição 1.53 Chamaremos os vértices de 0 –simplexo, as arestas de 1 –simplexo e as faces de 2 –simplexo. A união de simplexo é chamada de cadeia. Chamaremos a união de 0 –simplexo de 0 –cadeia, a união de 1 –simplexo de 1 –cadeia e a união de 2 –simplexo de 2 –cadeia.

Observação 1.54 Uma cadeia deve ser de um desses tipos e, além disso, não existem cadeias mistas.

Vamos introduzir uma álgebra de cadeia que será útil para contá-las posteriormente.

Definição 1.55 Sejam C_1^k e C_2^k duas k –cadeia, onde $k = 0, 1, 2$. Podemos definir uma operação \oplus entre duas k –cadeia, mesmo k , como uma nova k –cadeia constituída dos k –simplexo em C_1^k ou C_2^k , mas não em ambos, como ilustra a Figura (1.11).

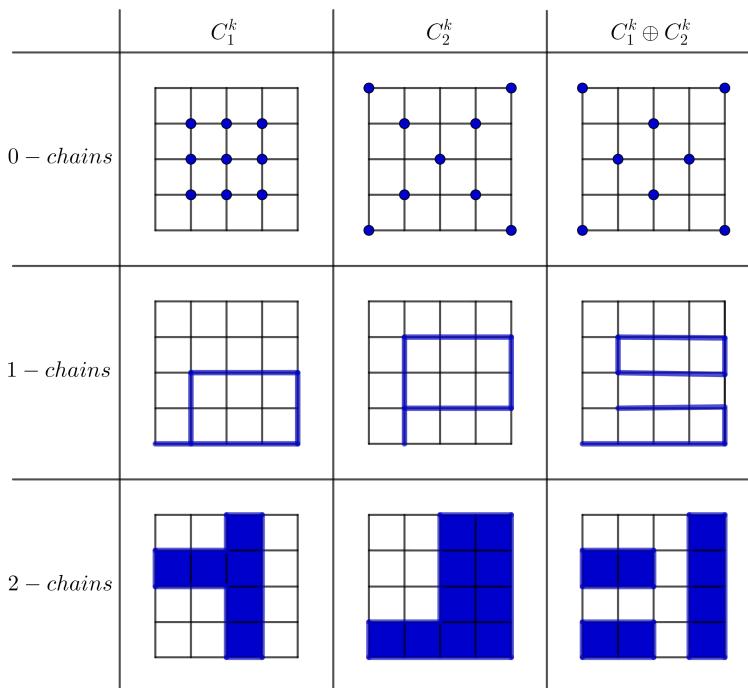


Figura 1.11: Exemplos da soma de k –cadeia

Proposição 1.56 A operação \oplus será chamada de soma, se C_1^k e C_2^k são duas k -cadeia, temos que $C_1^k \oplus C_2^k$ é uma k -cadeia, onde $k = 0, 1, 2$. Além disso, as seguintes propriedades são válidas:

- a) Comutatividade: $C_1^k \oplus C_2^k = C_2^k \oplus C_1^k$, para todas as k -cadeia C_1^k e C_2^k .
- b) Associatividade: $C_1^k \oplus (C_2^k \oplus C_3^k) = (C_1^k \oplus C_2^k) \oplus C_3^k$, para todas as k -cadeia C_1^k , C_2^k e C_3^k .
- c) Elemento Neutro: Existe um único elemento neutro \emptyset^k tal que $C_1^k \oplus \emptyset^k = C_1^k$, para toda k -cadeia C_1^k .
- d) Inversa: Existe um único elemento inverso para cada k -cadeia tal que $C_1^k \oplus C_2^k = \emptyset^k$.

Note que, cada grade \mathcal{G} determina três grupos chamados de grupos de cadeias de \mathcal{G} .

Introduziremos agora o operador bordo, ∂ , como um operador que conecta a álgebra de uma k -cadeia com a álgebra de uma $(k-1)$ -cadeia em uma grade.

Definição 1.57 Seja C^k uma k -cadeia. Defina ∂C^k como a $(k-1)$ -cadeia de todos os $(k-1)$ -simplexo que estão contidos em um número ímpar de k -simplexo de C^k , como ilustra a Figura (1.12).

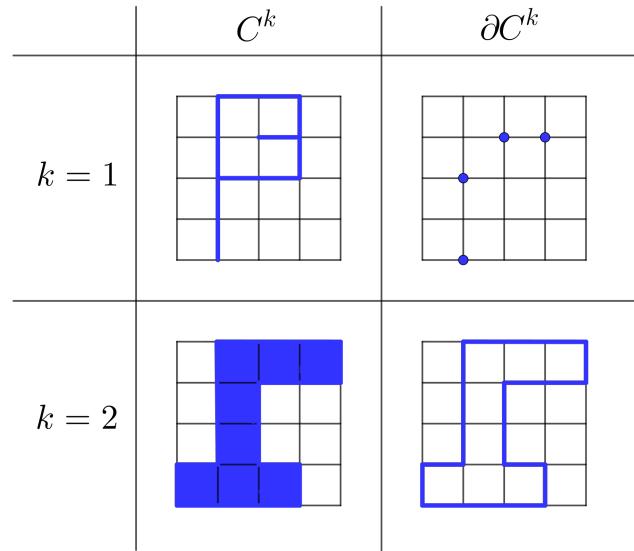


Figura 1.12: Exemplos do operador bordo

Observação 1.58 Note que o operador bordo só está definido para 1-cadeia e 2-cadeia.

Proposição 1.59 Sejam C_1^k e C_2^k k – cadeia com $k = 1, 2$. Então vale a propriedade da aditividade para o operador bordo, ou seja,

$$\partial(C_1^k \oplus C_2^k) = \partial(C_1^k) \oplus \partial(C_2^k)$$

Demonstração: Seja S um $(k-1)$ –simplex. Seja n_1 e n_2 os números de k –simplexo em C_1^k e C_2^k , respectivamente, que contém S . Então $S \subset \partial(C_1^k)$ se n_1 é ímpar e $S \subset \partial(C_2^k)$ se n_2 é ímpar. Se n_1 e n_2 são ambos ímpares ou ambos pares, então S não está em $\partial(C_1^k) \oplus \partial(C_2^k)$. Esse é o caso em que $n_1 + n_2$ é par. Por outro lado, se somente um de n_1 e n_2 for par e o outro ímpar, então $S \subset \partial(C_1^k) \oplus \partial(C_2^k)$ e $n_1 + n_2$ é ímpar. Consequentemente, S estar ou não contido em $\partial(C_1^k) \oplus \partial(C_2^k)$ depende somente se $n_1 + n_2$ é ímpar ou par. Retornando para $C_1^k \oplus C_2^k$, seja n o número de k –simplexo que contém S e que estão contidos em C_1^k e C_2^k . Esses são os simplexo que se cancelam e, portanto, não estão em $C_1^k \oplus C_2^k$. Segue que $n_1 + n_2 - 2n$ é o número de k –simplexo de $C_1^k \oplus C_2^k$ que contém S . Assim sendo, $S \subset \partial(C_1^k \oplus C_2^k)$ depende somente se $n_1 + n_2 - 2n$ é ímpar ou par. Como $(n_1 + n_2)$ e $(n_1 + n_2 - 2n)$ são ambos pares ou ambos ímpares que S está contido em ambos $\partial(C_1^k \oplus C_2^k)$ e $\partial(C_1^k) \oplus \partial(C_2^k)$, ou não está contido em nenhum deles. \square

Definição 1.60 Seja C^k uma k – cadeia. Se existe uma $(k+1)$ – cadeia T^{k+1} tal que $C^k = \partial(T^{k+1})$, então chamamos C^k de k – bordo.

Note que os k – bordo só estão definidos para $k = 0, 1$. Por convenção, para $k = 2$ dizemos que somente \emptyset é uma 2 – bordo.

Definição 1.61 Seja C^k uma k – cadeia. Se $\partial(C^k) = \emptyset$, então chamamos C^k de k – ciclo.

Note que o k – ciclo só está definido para $k = 1, 2$. Por convenção, dizemos que todas as 0 – cadeia são 0 – ciclos.

Definição 1.62 Seja \mathcal{G} uma grade. Duas k – cadeia C_1^k e C_2^k são ditas homólogas, escrevemos $C_1^k \sim C_2^k$, se $C_1^k \oplus C_2^k$ for uma k – bordo.

Proposição 1.63 Note que as seguintes propriedades são válidas:

- (a) Reflexiva: $C^k \sim C^k$ para toda k – cadeia.
- (b) Simétrica: Se $C_1^k \sim C_2^k$, então $C_2^k \sim C_1^k$.
- (c) Transitiva: Se $C_1^k \sim C_2^k$ e $C_2^k \sim C_3^k$, então $C_1^k \sim C_3^k$.

1 Parte 1

(d) *Aditiva:* Se $C_1^k \sim C_2^k$ e $C_3^k \sim C_4^k$, então $(C_1^k \oplus C_3^k) \sim (C_2^k \oplus C_4^k)$.

Lema 1.64 *Todo 1 – ciclo é a fronteira de exatamente duas 2 – cadeias complementares no plano.*

Demonstração: Seja λ um 1 – ciclo. Vamos provar, por indução sobre o número de arestas de \mathcal{G} , que existem ao menos duas 2 – cadeia com fronteira λ .

Note que, uma grade com quatro arestas consiste num retângulo vazio. Então existem somente dois 1 – ciclo, \emptyset e o próprio retângulo. O 1 – ciclo \emptyset é fronteira para as 2 – cadeia \emptyset e todo o plano, enquanto o retângulo com interior vazio é a fronteira do retângulo com interior cheio e da região do lado de fora do retângulo. Isso prova a condição inicial.

Assuma que vale o lema para uma grade \mathcal{G} dada e considere λ uma 1 – ciclo na grade \mathcal{G}^+ obtida por adicionarmos uma nova linha l em \mathcal{G} .

Assuma, s. p. g., que a linha l é horizontal. Considere K uma 2 – cadeia das regiões de \mathcal{G}^+ nas quais os lados inferiores estão em λ e sobre l . Então ∂K irá conter os lados de λ em l .

Seja $\mu = \lambda \oplus \partial K$, então l não é uma aresta de μ . Além disso, note que, μ é uma 1 – ciclo, pois $\partial\mu = \partial\lambda + \partial(\partial K) = \emptyset \oplus \emptyset = \emptyset$.

Por hipótese de indução, μ é a fronteira de pelo menos duas 2 – cadeia S_1 e S_2 . Seja $T_1 = S_1 \oplus K$ e $T_2 = S_2 \oplus K$. Então, $\partial T_1 = \partial S_1 \oplus \partial K = \mu \oplus \partial K = \lambda$ e, analogamente, $\partial T_2 = \lambda$. Portanto, T_1 e T_2 são duas 2 – cadeia com fronteira λ que são distintas, pois S_1 e S_2 são distintas.

Vamos provar que λ pode ser fronteira de, no máximo, duas 2 – cadeia. Seja T_1 uma 2 – cadeia qualquer com fronteira λ e seja T_2 uma 2 – cadeia com fronteira λ construída na primeira parte da prova. Temos que $\partial(T_1 \oplus T_2) = \partial T_1 \oplus \partial T_2 = \lambda \oplus \lambda = \emptyset$. Então $T_1 \oplus T_2$ é um 2 – ciclo.

Note que os únicos 2 – ciclo são \emptyset e o plano todo. Assim sendo, ou $T_1 \oplus T_2 = \emptyset$ ou $T_1 \oplus T_2$ é o plano todo. No primeiro caso, $T_1 = T_2$, enquanto no segundo caso, T_1 é o complementar de T_2 . Portanto existem, no máximo, duas 2 – cadeia com fronteira λ . \square

Definição 1.65 *Sejam G um subconjunto do plano e \mathcal{G} uma grade em G . Duas k – cadeia em \mathcal{G} , C_1^k e C_2^k , são chamadas de homólogas em G , donotado por*

$$C_1^k \sim C_2^k \text{ (em } G\text{)}$$

se $C_1^k \oplus C_2^k$ é uma fronteira de uma $(k+1)$ – cadeia em \mathcal{G} que está contida em G .

Corolário 1.66 Sejam F um conjunto conexo e fechado e G o seu conjunto complementar aberto. Seja \mathcal{G} uma grade. Então todo 1-ciclo λ em G é a fronteira de uma cadeia (em G). Em outras palavras, se o conjunto aberto G tem apenas um buraco, então todo 1-ciclo é bordo de uma 2-cadeia (em G).

Demonstração: Pelo Lema (1.64), λ é a fronteira de duas complementares 2-cadeia T_1 e T_2 . Vamos mostrar que uma dessas 2-cadeia está contida em G . Suponha, por absurdo, que T_1 e T_2 intersectam F . Então os conjuntos não-vazios $F \cap T_1$ e $F \cap T_2$ formam uma partição de F . Logo, todo ponto de F deve pertencer a um desses conjuntos já que $T_1 \cup T_2$ cobre todo o plano. Como F é conexo, por definição, um desses conjuntos contém um ponto próximo ao outro. Consequentemente, F contém um ponto da fronteira entre T_1 e T_2 . Como a fronteira entre T_1 e T_2 é λ , temos que F contém um ponto de λ . Absurdo, pois, por hipótese, $\lambda \subset G$. Portanto, G contém ou T_1 ou T_2 , e λ é a fronteira de uma 2-cadeia (em G). \square

Corolário 1.67 Sejam F um conjunto fechado com duas componentes conexas e G o seu conjunto complementar aberto. Seja \mathcal{G} uma grade. Então

- (a) \mathcal{G} deve conter um 1-ciclo que não é fronteiras (em G).
- (b) quaisquer dois 1-ciclos em G são homólogos (em G).

Demonstração:

- (a) Seja F a união de duas componentes conexas F_1 e F_2 . Considere um 1-ciclo λ em G , pelo Lema (1.64) existem duas 2-cadeia T_1 e T_2 de modo que $F_1 \subset T_1$ e $F_2 \subset T_2$. Como T_1 e T_2 intersectam F , então λ não é bordo de nenhuma cadeia contida em G . Portanto, \mathcal{G} contém um 1-ciclo que não tem fronteiras em G . Como ilustra Figura (1.13).

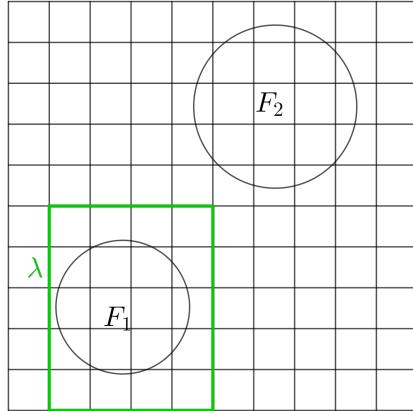


Figura 1.13: Exemplo de λ

- (b) Sejam λ e μ dois 1 -ciclo em G que não são fronteiras de 2 -cadeia (em G). Pelo Lema (1.64), λ é fronteira de duas 2 -cadeia T_1 e T_2 . Pelo mesmo argumento do Corolário (1.66), as componentes F_1 e F_2 estão inteiramente contidas em T_1 ou T_2 . Do fato de λ não ser fronteira de uma 2 -cadeia (em G), segue que F_1 e F_2 não podem ambas pertencer ao mesmo conjunto T_1 e T_2 . Assim sendo, podemos supor s. p. g., que $F_1 \subset T_1$ e $F_2 \subset T_2$. Analogamente, μ é a fronteira de duas 2 -cadeia complementares S_1 e S_2 e, novamente, podemos supor s. p. g., que $F_1 \subset S_1$ e $F_2 \subset S_2$. Considere a cadeia $T_1 \oplus S_1$. Claramente $T_1 \oplus S_1$ é disjunta de F_2 , pois T_1 e S_1 são disjuntas de F_2 . Mas, $T_1 \oplus S_1$ é disjunto de F_1 , pois cada 2 -cadeia de F_1 em G está contida em F_1 e S_1 . Assim sendo, $T_1 \oplus S_1$ é uma 2 -cadeia (em G). Mas $\partial(T_1 \oplus S_1) = \lambda \oplus \mu$ e, portanto, quaisquer dois 1 -ciclo em G são homólogos (em G).

□

Teorema 1.68 *Sejam G um conjunto aberto do plano, \mathcal{G} uma grade em G , e sejam P e Q dois pontos de G que são vértices de \mathcal{G} . Então $P \sim Q$ (em G) se, e somente se, P e Q podem ser conectados por uma cadeia poligonal em G .*

Demonstração: (\implies) Por hipótese $P \sim Q$ (em G), ou seja, existe uma 1 -cadeia $C_1^1 \in \mathcal{G}$ tal que $\partial(C_1^1) = P \oplus Q$. Note que, C_1^1 é uma cadeia poligonal totalmente contida em G tal que P e Q são suas extremidades. Logo, P e Q podem ser conectados por uma cadeia poligonal em G .

(\impliedby) Por hipótese P e Q podem ser conectados por uma cadeia poligonal $\gamma \subset \mathcal{G}$.

Note que γ é um $1 - \text{cadeia}$, além disso, $\partial(\gamma) = P \oplus Q$. Portanto, por definição, $P \sim Q$ (em G). \square

Lema 1.69 *Sejam E_1 e E_2 dois conjuntos compactos disjuntos. Então existe uma constante $\epsilon > 0$ tal que se R é um ponto de E_1 e S um ponto de E_2 , então*

$$\|R - S\| > \epsilon.$$

Demonstração: Suponha, por absurdo, que para cada $\epsilon > 0$ existe um par de pontos $R \in E_1$ e $S \in E_2$ tais que $\|R - S\| < \epsilon$, então, em particular, podemos achar sequências de pontos $\{R_n\} \subset E_1$ e $\{S_n\} \subset E_2$ tais que $\|R_n - S_n\| < \frac{1}{n}$. Segue da compacidade que um dos conjuntos E_1 ou E_2 contém um ponto próximo ao outro. Do fato de E_1 e E_2 serem fechados, esse ponto pertence a ambos os conjuntos. Absurdo, pois E_1 e E_2 são disjuntos por hipótese. \square

Lema 1.70 *Sejam G_1 e G_2 dois conjuntos abertos com conjuntos complementares compactos F_1 e F_2 , respectivamente. Sejam \mathcal{G} uma grade, P e Q dois pontos que são vértices de \mathcal{G} tais que*

$$P \sim Q \text{ (em } G_1)$$

$$P \sim Q \text{ (em } G_2)$$

Sejam λ_1 e λ_2 $1 - \text{cadeia}$ em G_1 e G_2 , respectivamente, tais que $\partial(\lambda_1) = \partial(\lambda_2) = P \oplus Q$. \mathcal{G} contém λ_1 e λ_2 e

$$\lambda_1 \sim \lambda_2 \text{ (em } G_1 \cup G_2)$$

então em uma subdivisão adequada \mathcal{G}^+ de \mathcal{G} temos

$$P \sim Q \text{ (em } G_1 \cap G_2).$$

Demonstração: Por hipótese $\lambda_1 \oplus \lambda_2$ é a fronteira de uma $2 - \text{cadeia}$ T em $G_1 \cup G_2$. Então os conjuntos compactos $T \cap F_1$ e $T \cap F_2$ são disjuntos. Pelo Lema (1.69) existe uma constante $\epsilon > 0$ de modo que os pontos desses conjuntos sempre estão separados por uma distância de pelo menos ϵ . Assim sendo, podemos subdividir a grade \mathcal{G} em uma grade \mathcal{G}^+ tal que alguma $2 - \text{cadeia}$ de \mathcal{G}^+ não intersecte nem $T \cap F_1$ nem $T \cap F_2$. Conseguimos tudo isso adicionando um número suficiente de linhas de modo que as arestas das $2 - \text{cadeia}$ da nova grade sejam menores que $\frac{\epsilon}{2}$. Posteriormente, nos substituímos λ_1 , λ_2 e T por suas subdivisões em \mathcal{G}^+ . Seja S a $2 - \text{cadeia}$ em \mathcal{G}^+ das faces de T que intersectam F_2 . Por construção, S é disjunto de F_1 . Seja $\lambda = \lambda_1 \oplus \partial(S)$. Como $\partial(\lambda) = \partial(\lambda_1) \oplus \partial(\partial(S)) = P \oplus Q$, então λ conecta P e Q . Vamos provar que λ é disjunta de F_1 e F_2 . Observe primeiro que λ_1 e S são disjuntos

de F_1 , consequentemente, λ é disjunto de F_1 . Além disso, note que $T \oplus S$ é disjunto de F_2 , pois as faces de T que intersectam F_2 estão em S e, portanto, se cancelam na soma. Assim,

$$\partial(S \oplus T) = \partial(S) \oplus \partial(T) = \partial(S) \oplus \lambda_1 \oplus \lambda_2 = \lambda \oplus \lambda_2$$

Consequentemente, $\lambda = \partial(S \oplus T) \oplus \lambda_2$. Portanto, λ é disjunto de F_2 , pois $S \oplus T$ e λ_2 são disjuntos de F_2 .

Disto e do Teorema (1.68) segue que $P \sim Q$ (em $G_1 \cap G_2$). \square

Teorema 1.71 *Caminhos não dividem o plano.*

Demonstração: Sejam γ um caminho e P e Q dois pontos que não pertencem a γ . Suponha, por absurdo, que P e Q não podem ser conectados por um caminho contido em um conjunto aberto G , onde G é o complementar de γ . Seja T uma transformação topológica do intervalo $[0, 1]$ em γ . Sejam γ_1 e γ_2 duas “metades” de γ que correspondem pela T aos intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$. Vamos provar que uma dessas “metades”, γ_1 ou γ_2 , também separam P e Q . Suponha, por absurdo, que nem γ_1 , nem γ_2 , separam P e Q . Então, existem caminhos poligonais λ_1 e λ_2 conectando P a Q sem intersectar γ_1 e γ_2 , respectivamente. Note que podemos considerar λ_1 e λ_2 como 1 – cadeia em uma grade adequada. Sejam G_1 e G_2 os complementares de γ_1 e γ_2 , respectivamente. Então, $\lambda_1 \subset G_1$, $\lambda_2 \subset G_2$ e $\partial(\lambda_1) = \partial(\lambda_2) = P \oplus Q$. Como $G_1 \cup G_2$ é o plano todo a menos do ponto de intersecção de γ_1 e γ_2 , segue do Corolário (1.67) que $\lambda_1 \sim \lambda_2$ (em $G_1 \cup G_2$). Então pelo Lema (1.70) $P \sim Q$ (em $G_1 \cap G_2$). Absurdo, pois contradiz a hipótese de que γ separa P e Q , então concluímos que um dos caminhos, γ_1 ou γ_2 , separa P e Q .

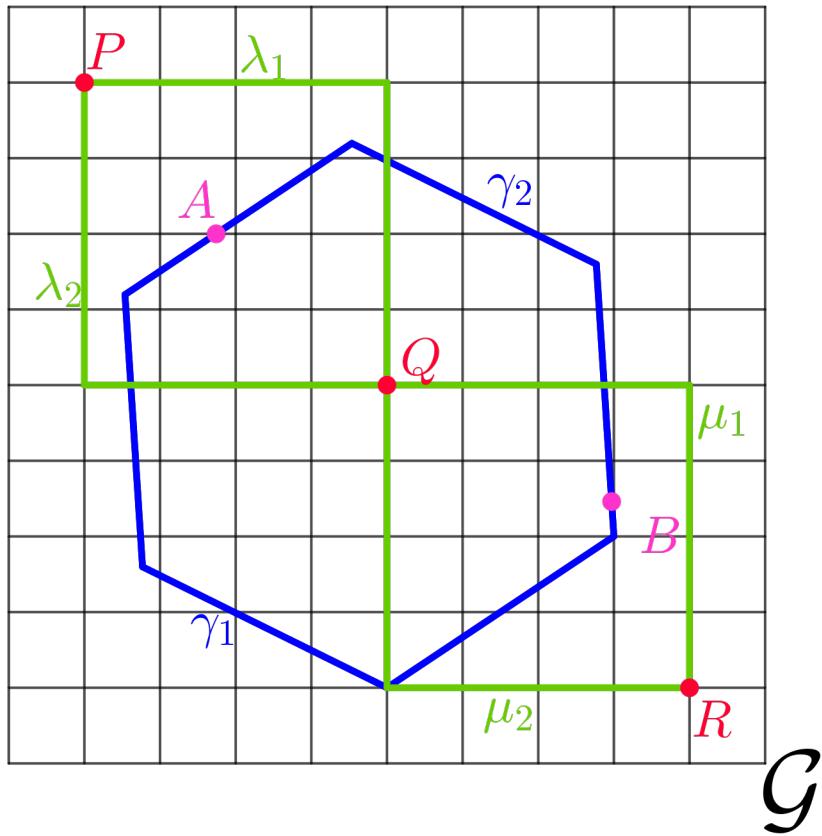
Voltando ao problema inicial, podemos continuar dividindo o intervalo $[0, 1]$ em “metades” e concluiremos que essas novas “metades” também dividem P de Q . Mas, note que, essas divisões criam uma sequência de subintervalos de $[0, 1]$ que convergem para um ponto S em γ . Então, os pontos P e Q são separados por pequenos intervalos de γ contidos em qualquer vizinhança aberta de S . Absurdo!

Portanto, γ não separa P e Q . \square

Teorema 1.72 (Teorema da curva de Jordan) *Seja \mathcal{J} uma curva de Jordan (qualquer caminho fechado). Então, \mathcal{J}' não é conexo, mas consiste de duas componentes conexas disjuntas, uma das quais é limitada (chamada de interior) e a outra não é limitada (chamada de exterior). A curva de Jordan \mathcal{J} forma uma fronteira para ambos os lados.*

Demonstração: Sejam P , Q e R três pontos em \mathcal{J}' . Suponha que todo caminho conectando P e Q intersecta \mathcal{J}' , ou seja, P e Q estão em componentes conexas distintas

de \mathcal{J}' . Analogamente, suponha que Q e R também estejam em componentes conexas distintas de \mathcal{J}' . Vamos provar que existe um caminho entre P e R que não intersecta \mathcal{J}' , ou seja, P e R estão na mesma componente conexa de \mathcal{J}' . Sejam A e B dois pontos em \mathcal{J} . Note que A e B determinam dois caminhos γ_1 e γ_2 , cuja união é \mathcal{J} e cuja intersecção é o conjunto com os pontos A e B . Pelo Teorema (1.71) nem γ_1 nem γ_2 sozinhas dividem o plano. Assim sendo, existe uma grade \mathcal{G} e 1-cadeias $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ e μ_2 tais que $\partial(\lambda_1) = \partial(\lambda_2) = P \oplus Q$ e $\partial(\mu_1) = \partial(\mu_2) = Q \oplus R$, μ_1 e λ_1 não intersectam γ_1 e μ_2 e λ_2 não intersectam γ_2 . Sejam G_1 e G_2 conjuntos abertos complementares a γ_1 e γ_2 , respectivamente, como ilustra a Figura (1.14)


 Figura 1.14: Grade \mathcal{G}

O 1-ciclo $\lambda_1 \oplus \lambda_2$ não pode ser uma fronteira em $G_1 \cup G_2$, pois pelo Lema (1.70) P e Q poderiam ser conectados em $G_1 \cap G_2$, o que contraria a hipótese. Analogamente, $\mu_1 \oplus \mu_2$ não podem ser uma fronteira em $G_1 \cup G_2$. Como $G_1 \cup G_2$ é o complemento do par de pontos $\{A, B\}$, segue do Corolário (1.67) que

$$(\lambda_1 \oplus \lambda_2) \sim (\mu_1 \oplus \mu_2) \text{ (em } G_1 \cup G_2\text{)}$$

Em outras palavras, $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \mu_1 \oplus \mu_2$ é uma fronteira em $G_1 \cup G_2$. Aplicando o Lema (1.70) para as duas cadeias $(\lambda_1 \oplus \mu_1)$ e $(\lambda_2 \oplus \mu_2)$ temos que cada uma delas conecta P a R em G_1 e G_2 , respectivamente. Assim sendo, $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \mu_1 \oplus \mu_2$ é uma fronteira em $G_1 \cup G_2$. Portanto, concluímos que P e R podem ser conectados em $G_1 \cap G_2 = \mathcal{J}$. Consequentemente, P e R estão na mesma componente conexa de \mathcal{J}' . Portanto, \mathcal{J} divide o plano em no máximo duas componentes conexas.

Agora, vamos exibir dois pontos tais que todo caminho entre eles intersecta \mathcal{J} . Sejam A e B dois pontos quaisquer em \mathcal{J} . Note que A e B determinam dois caminhos γ_1 e γ_2 , cuja intersecção é o conjunto com os ponto A e B . Seja σ uma grade ao redor de A que não contenha B . Os caminhos γ_1 e γ_2 intersectam um ponto dentro de σ e o outro fora de σ , logo pelo Lema (1.64), eles intersectam σ . Como σ e \mathcal{J} se intersectam, vamos mostrar que σ contém pontos de “ambos os lados” de \mathcal{J} , pontos esses que não podem ser conectados por um caminho que não intersecta \mathcal{J} . Seja \mathcal{G} uma grade na qual σ é uma $1 - \text{cadeia}$ e de tal modo que nenhum lado de σ intersecte ambos os conjuntos γ_1 e γ_2 . Seja λ a $1 - \text{cadeia}$ que consiste dos lados de σ que intersectam γ_2 . Por construção, λ é não vazio. Ao mesmo tempo λ não pode ser toda a grade σ , pois σ intersecta γ_1 . Então, $\partial(\lambda) \neq \emptyset$ mas consiste de um número par de vértices. Organize esses vértices em pares $P_1, Q_1; P_2, Q_2; \dots; P_n, Q_n$. Note que nenhum desses vértices está em \mathcal{J} , pois qualquer vértice de σ em \mathcal{J} estará em dois lados de λ . Afirmamos que pelo menos um desses pares é separado por \mathcal{J} . De fato, suponha, por absurdo, cada um desses pares de pontos pode ser conectados por um caminho que não intersecte \mathcal{J} . Então, em uma subdivisão adequada \mathcal{G}^+ esses caminhos poligonais serão todos $1 - \text{cadeias}$, digamos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, onde $\partial(\mu_1) = P_1 \oplus Q_1$, $\partial(\mu_2) = P_2 \oplus Q_2, \dots, \partial(\mu_n) = P_n \oplus Q_n$. Seja $\mu = \mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_n$, então $\partial(\mu) = \partial(\lambda)$. Consequentemente, $\lambda \oplus \mu$ é um $1 - \text{ciclo}$. Sejam G_1 e G_2 conjuntos abertos complementares a γ_1 e γ_2 , respectivamente. Como μ e λ não intersectam γ_1 , temos que $\mu \oplus \lambda$ é um $1 - \text{ciclo}$ em G_1 . Pelo Corolário (1.66), $\lambda \oplus \mu$ é uma fronteira em G_1 . A $1 - \text{cadeia}$ $\mu \oplus \lambda \oplus \sigma$ é um $1 - \text{ciclo}$. Por construção, $\lambda \oplus \sigma$ não intersectam γ_2 pois os lados de σ que intersectam γ_2 são cancelados na soma. Assim sendo, $\mu \oplus \lambda \oplus \sigma$ é uma fronteira em G_2 . Segue de que

$$\sigma = (\lambda \oplus \mu) \oplus (\lambda \oplus \mu \oplus \sigma)$$

é uma fronteira em $G_1 \cup G_2$. Mas $G_1 \cup G_2$ é o plano todo menos os pontos A e B .

Absurdo, pois a grade σ foi escolhida de modo a não ser uma fronteira em $G_1 \cup G_2$. Portanto, \mathcal{J} divide o plano em pelo menos duas componentes conexas.

Temos então que \mathcal{J} divide o plano em duas componentes R_1 e R_2 . Como \mathcal{J} é fechada, temos que R_1 e R_2 são abertos e, consequentemente, não contêm suas fronteiras. Assim sendo, as fronteiras de R_1 e R_2 , denotadas respectivamente por $b(R_1)$ e $b(R_2)$, são tais que $b(R_1) \subset R_2 \cup \mathcal{J}$ e $b(R_2) \subset R_1 \cup \mathcal{J}$. Mas, pontos de R_1 não podem estar próximos de R_2 (e vice-versa), pois eles são abertos. Assim sendo, $b(R_1)$ e $b(R_2)$ são subconjuntos de \mathcal{J} . Note que um ponto arbitrário A de \mathcal{J} está próximo de R_1 e R_2 . Então \mathcal{J} é uma fronteira para ambas as partes.

Como \mathcal{J} é limitado, está contido em um disco. Então exatamente uma dessas regiões R_1 ou R_2 vai conter o conjunto conexo dos pontos fora desse disco e, portanto, será ilimitado. A outra região determinada por \mathcal{J} será limitada. Portanto, uma das regiões será limitada e a outra ilimitada. \square

2.1 Complexos

Definição 2.1 Uma n -célula é um conjunto cujo interior é homeomorfo a um disco n -dimensional $D^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ com a propriedade adicional que sua fronteira deve ser dividida em um número finito de células de dimensão menor, chamadas de faces da n -célula. Escrevemos $\sigma < \tau$ se σ é uma face de τ .

- Uma 0-célula é um ponto ou vértice A ;
- Uma 1-célula é um segmento de reta $a = AB$ tal que $A < a, B < a$;
- Uma 2-célula é um polígono $\sigma = ABC$, em particular um triângulo, tal que $AB, AC, BC < \sigma$. Note que, $A < AB < \sigma$, portanto $A < \sigma$;
- Uma 3-célula é um poliedro sólido tal que polígonos, arestas e vértices são faces.

Note que as faces de uma n -célula são células de menor dimensão. A fronteira de uma 1-célula ou aresta são 0-células ou vértices, a fronteira de uma 2-célula ou polígono são 1-células ou arestas e 0-células ou vértices; essas células vão se juntar para formarem complexos.

Células são “coladas” juntas para formarem complexos, colando aresta a aresta e vértice a vértice e identificando células de dimensão maior de uma maneira similar.

Definição 2.2 Um complexo K é um conjunto finito de células,

$$K \doteq \bigcup \{\sigma : \sigma \text{ é uma célula}\}$$

tal que:

1. Se σ é uma célula em K , então todas as faces de σ são elementos de K ;
2. Se σ e τ são células em K , então $\text{int}(\sigma) \cap \text{int}(\tau) = \emptyset$.

Um complexo de dimensão k é chamado de k -complexo.

Definição 2.3 Seja K um complexo. O conjunto de todos os pontos nas células de K é

$$|K| \doteq \{x : x \in \sigma \in K, \text{ onde } \sigma \text{ é uma célula de } K\}$$

o qual chamaremos de espaço de realização de K .

A diferença entre um espaço e um complexo é que K é um conjunto de células e $|K|$ é um conjunto de pontos. Complexos são uma espécie de camadas estruturadas, construídas de células de diversas dimensões.

Definição 2.4 Seja K um complexo. O k -esqueleto de K é

$$K_k \doteq \{k\text{-células de } K\}$$

Note que K_k é um k -complexo e $K = \bigcup_{k=1}^n K_k$, onde $n = \dim(K)$.

Uma estrutura topológica deve ser definida para complexos, definindo vizinhanças para todos os pontos em $|K|$. Se K é um complexo, então cada célula em K é homeomorfa a uma bola n -dimensional em \mathbb{R}^n . Construiremos um novo espaço topológico a partir da união de células usando a topologia de identificação, definida para 2 -complexos a seguir.

Definição 2.5 2 -complexos possuem três tipos de pontos: pontos no interior de um dos polígonos, pontos no interior de uma das arestas e pontos vértices. Vamos definir vizinhanças para cada tipo de ponto separadamente. Em geral, começamos com um conjunto de polígonos $\mathcal{P} = \{P_i\}$.

- **Pontos no interior dos polígonos:** Se um ponto x está no interior de um polígono P_i , então defina a vizinhança de x como sendo qualquer disco totalmente contido no interior de P_i ;
- **Pontos no interior das arestas:** Se um ponto y está em uma aresta b a qual não faz parte de uma fronteira de qualquer polígono, então defina a vizinhança de y como qualquer intervalo aberto contido no interior de b . Se y é um ponto numa aresta a , onde a é composta por uma coleção de arestas a_1, a_2, \dots, a_n de polígonos $\{P_i\}_1^n$, então podemos assumir que essa colagem foi feita de forma a respeitar a direção escolhida nas arestas. Primeiramente, encontramos os pontos que juntos formam o ponto y . Note que cada aresta é topologicamente equivalente ao intervalo unitário $I = [0, 1]$ e, então, existem homeomorfismos da aresta a para o intervalo I e de I para cada aresta a_i , escolhendo de maneira aos pontos iniciais das arestas irem a 0 e os pontos

finals a 1. Seja $f_i : a \rightarrow a_i$ a composição de homeomorfismos, para $i = 1, 2, \dots, n$. Então o ponto y corresponde aos pontos $y_i = f_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Cada ponto y_i esta na aresta a_i em algum polígono P_i e tem uma vizinhança de meio-disco nesse polígono. Esses meio-discos podem ser escolhidos de forma a não sobrepor uns aos outros, não incluirem nenhum vértice e terem o mesmo raio. Quando as arestas a_1, a_2, \dots, a_n são coladas para formar a aresta a , os meio-discos também são colados ao longo do seu diâmetro e criam uma vizinhança para cada ponto nas arestas do complexo K .

- **Pontos de vértice:** Seja B um vértice no complexo K , formado pela identificação dos vértices B_1, B_2, \dots, B_n de um conjunto de polígonos e arestas. Cada vértice B_i está ou em um desses polígonos ou em uma aresta, a qual não faz parte de nenhum desses polígonos. Se B_i está em um polígono, escolha a topologia relativa de B_i no polígono e note que isso será visto como o setor de um disco. Esses setores circulares devem ser escolhidos de maneira a não sobrepor uns aos outros, não intersectarem outros vértices e terem o mesmo raio. Se B_i está em uma aresta, então a topologia relativa de B_i é um semi-intervalo com B_i no final. Após construirmos o complexo K , esses setores e intervalos semi-abertos são colados para formar a vizinhança de B .

Note que as vizinhanças de pontos nos complexos, nesta topologia, nem sempre são discos.

2.2 Superfícies

Definição 2.6 Uma n -variedade (ou variedade de dimensão n) é um espaço topológico tal que cada ponto x tem uma vizinhança homeomorfa a um disco aberto n -dimensional com centro em x e raio r , ou seja, $D^n(x, r) \doteq \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$.

Vamos também assumir que para quaisquer pontos distintos tenhamos vizinhanças disjuntas. Variedades de dimensão 2 são, geralmente, chamadas de superfícies.

Definição 2.7 Uma n -variedade com fronteira é um espaço topológico tal que cada ponto tem uma vizinhança topologicamente equivalente ou a um disco aberto de dimensão n , $D^n(x, r)$, ou a um meio-disco $D_+^n \doteq \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r \text{ e } x_n > 0\}$. Pontos cuja vizinhança é um meio-disco são chamados de pontos de fronteira.

Definição 2.8 Uma superfície não-orientada é aquela que contém uma faixa de Möbius.

Exemplo 2.9 Um exemplo de superfície não-orientada é a garrafa de Klein. Como ilustra a Figura (2.1), sua representação planar

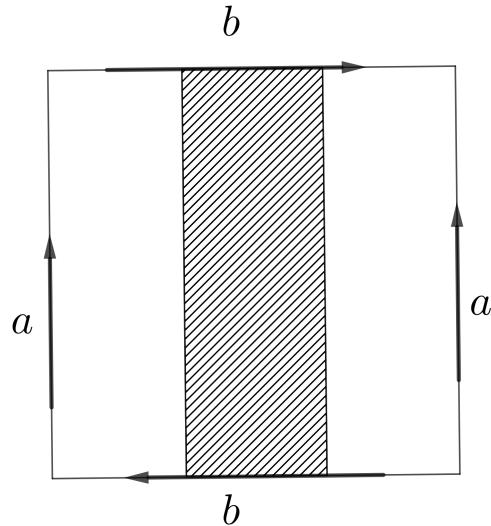


Figura 2.1: Garrafa de Klein com faixa de Möbius.

contém uma faixa de Möbius.

Na Tabela (2.1) consideramos algumas superfícies e características relacionadas a elas, note primeiramente que todas as características descritas acima são propriedades topológicas.

Superfície	Fronteira	Concavidade	Alça	Orientada
Esfera	não	sim	não	sim
Toro	não	sim	sim	sim
Cilindro	sim	não	não	sim
Faixa de Möbius	sim	não	não	não
Garrafa de Klein	não	não	sim	não

Tabela 2.1: Classificação de algumas superfícies.

Além disso, essas superfícies listadas caracterizam completamente todas as superfícies a menos de homeomorfismos (esse resultado será provado posteriormente). Por outro lado, falta considerar superfícies como a da Figura (2.2),

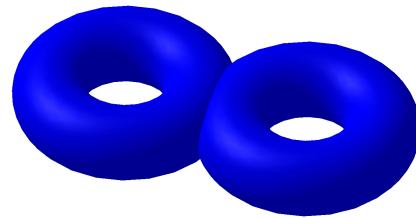


Figura 2.2: Toro com duas alças.

a qual chamaremos de toro com duas alças. Podemos construir toros para um número qualquer de alças.

Definição 2.10 *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies. Removendo um pequeno disco aberto de cada uma das superfícies e colando as fronteiras desses discos obtemos uma nova superfície chamada de soma conexa de S_1 e S_2 , escrevemos $S_1 \# S_2$.*

A Figura (2.3) representa o plano projetivo, o qual denotaremos por \mathbb{P}^2 . Note que existe uma faixa de Möbius em \mathbb{P}^2 , então a superfície é não orientada.

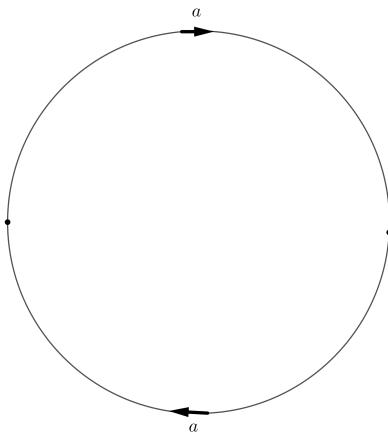


Figura 2.3: Diagrama do plano projetivo.

2.3 Triangulação

Geralmente é uma vantagem usar células triangulares em um complexo, de modo que só tenhamos um tipo de n-célula. Objetos triangulares têm a boa propriedade de que o número de vértices identifica a dimensão da célula.

Definição 2.11 *Seja X um espaço topológico de dimensão 2. Dizemos que X é triangulável se podemos encontrar um 2-complexo K tal que $X = |K|$ e K tem somente células triangulares satisfazendo a condição de que quaisquer dois triângulos são identificados ou ao longo de uma aresta, ou em um único vértice, ou são disjuntos. Um complexo triangular K é chamado de complexo simplicial ou triangulação de X . Uma célula de um complexo simplicial é chamada de simplexo.*

Note que a Definição (2.11) implica mais que o espaço possa ser dividido em triângulos. Na Figura (2.4) temos um exemplo de complexo celular somente com 2-células triangulares, mas que não é uma triangulação.

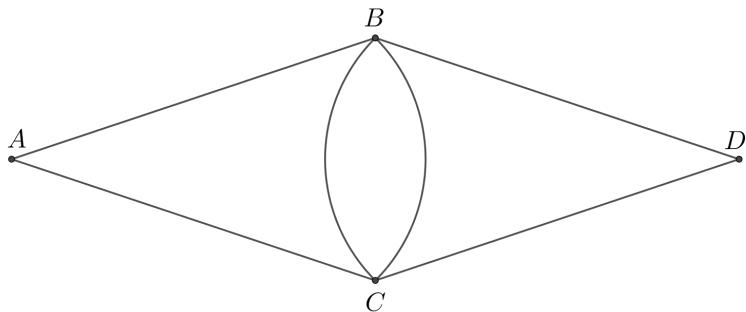


Figura 2.4: Exemplo 2-complexo.

Ainda sobre a Definição (2.11), note que essa definição implica não somente que o complexo será dividido em triângulos, mas com a condição adicional exigida, temos que cada vértice, aresta e triângulo podem ser unicamente rotulados por uma atribuição de um rótulo em cada vértice.

Mais geralmente, gostaríamos de triangular um complexo qualquer. Cada face de um 2 -complexo é um polígono e pode ser facilmente dividida em triângulos, adicionando um novo vértice no interior do polígono e conectando esse vértice a cada um dos vértices da fronteira, como ilustra a Figura (2.5).

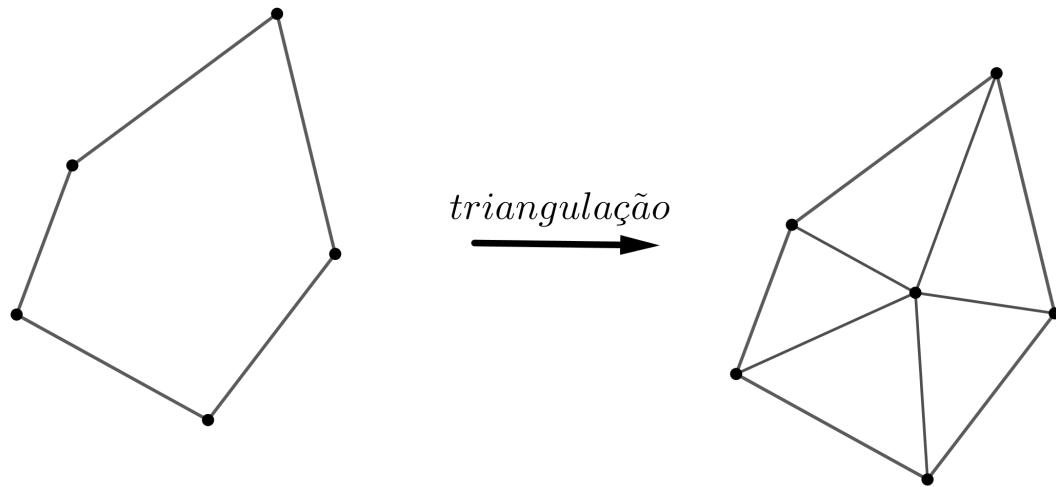


Figura 2.5: Exemplo de triangulação de um polígono.

Contudo, podemos notar que esse processo descrito acima nos dá um método de dividir qualquer 2 -complexo em triângulos, mas isso não nos dá uma triangulação satisfazendo a Definição (2.11). Como ilustra a Figura (2.6).

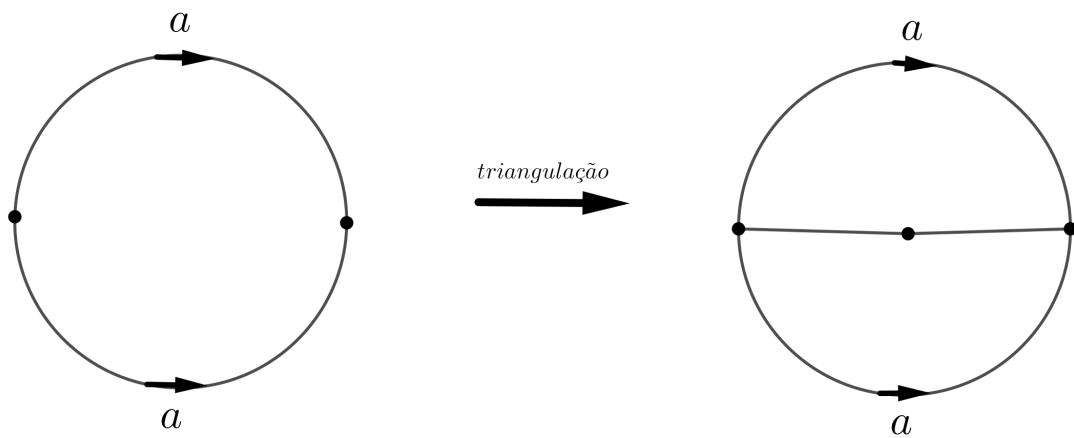


Figura 2.6: Divisão em triângulos.

Definição 2.12 Seja K um 2-complexo com 2-células triangulares. Um novo complexo K' chamado de subdivisão baricêntrica de K é formado pela introdução de um novo vértice no centro de cada triângulo e um novo vértice no ponto médio de cada aresta, então adicionamos novas arestas conectando o vértice central a cada um dos vértices no ponto médio e os vértices originais. Em geral podemos descrever esse processo como criar um novo vértice v_σ no centro de cada célula σ em K , incluindo qualquer vértice P quando definimos $v_P \doteq P$, e adicionamos uma célula conectando v_σ a v_τ , sempre que $\sigma < \tau$.

A subdivisão baricêntrica nem sempre nos dá uma triangulação de um 2-complexo com faces triangulares. A segunda divisão baricêntrica sempre é suficiente. Agora vamos definir em uma superfície uma estrutura combinatorial.

Definição 2.13 Uma superfície triangulada (sem fronteira) é um 2-complexo simplicial tal que:

1. Cada aresta é identificada com exatamente uma outra aresta;
2. Em cada conjunto β_k dos triângulos que possuem apenas um vértice em comum V , podemos rotular esses triângulos por $T_{1_k}, T_{2_k}, \dots, T_{n_k}$, onde n_k é o número de triângulos em β_k . Além disso, uma aresta de T_{1_k} que contém o vértice V será identificada apenas com uma aresta de T_{2_k} . A outra aresta de T_{2_k} que contém o vértice V será identificada apenas com uma aresta de T_{3_k} e, assim, sucessivamente, até que identifiquemos a aresta restante de T_{n_k} com uma aresta de T_{1_k} .

A condição (1) da Definição (2.13) garante que pontos em uma aresta pertencem exatamente a dois triângulos e, então, existe uma vizinhança em forma de disco para cada ponto nas arestas, resultando de dois meio-discos colados juntos, um em cada triângulo. A condição (2) da Definição (2.13) garante que a vizinhança de um vértice parece com um disco.

Teorema 2.14 Uma superfície é compacta se, e somente se, qualquer triangulação usa um número finito de triângulos.

Demonstração: (\implies) Seja S uma superfície compacta, suponha, por absurdo, que S tem um complexo simplicial com um número infinito de triângulos. Como S é uma superfície enriquecida com uma estrutura combinatorial, pela Definição (2.13), existe somente uma quantidade finita de triângulos em cada vértice. Assim sendo, se existe uma quantidade infinita de triângulos, então existe um número infinito de vértices, sobre os quais podemos considerar a sequência $\{v_i\}_{i=1}^\infty$. Como S é compacta, temos, por definição, que essa sequência tem um ponto limite $v \in S$. Se v

estiver no interior de algum triângulo, então v tem uma vizinhança totalmente contida no interior desse triângulo, mas isso contradiz o fato de v ser o ponto limite de um conjunto de vértices. Se v está ao longo de uma aresta, então v tem uma vizinhança tomada de dois triângulos, a qual não contém nenhum outro vértice, então, novamente, temos uma contradição. Se v é um vértice, então v é o vértice dos triângulos T_1, T_2, \dots, T_n e tem sua vizinhança composta de setores desses triângulos e essa vizinhança não contém nenhum outro vértice. Então, não existe nenhum outro vértice na vizinhança de v . Essa contradição implica que só existe uma quantidade finita de vértices e, portanto, uma quantidade finita de triângulos.

(\Leftarrow) Seja S uma superfície construída a partir de uma quantidade finita de triângulos. Seja $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de pontos em S . Como existe somente uma quantidade finita de triângulos e uma quantidade infinita de pontos dessa sequência, algum triângulo T contém um número infinito de pontos. Seja $\{x'_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma subsequência de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ em T . Um triângulo é um subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^2 , então pelo Teorema de Heine-Borel, T é compacto. Consequentemente, a subsequência $\{x'_i\}_{i=1}^{\infty}$ tem um ponto limite $x \in T \subset S$. Assim, x é um ponto limite para a sequência $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Portanto, S é compacta. \square

Teorema 2.15 *Uma superfície é conexa se, e somente se, toda triangulação pode ser ordenada na forma T_1, T_2, \dots, T_n com cada triângulo tendo pelo menos uma aresta identificada com o triângulo seguinte na sequência.*

Demonstração: (\Rightarrow) Seja S uma superfície conexa com uma dada triangulação. Escolha T_1 como sendo um triângulo qualquer. Como triângulos são conexos, T_1 é conexo. Como S é uma superfície conexa, existe um triângulo T_2 o qual é colado a T_1 ao longo de uma aresta, formando um complexo conexo com dois triângulos. Então escolha T_3 colado ao longo de uma aresta do complexo formado por $T_1 \cup_{\text{colagem}} T_2$, assim $T_1 \cup_{\text{colagem}} T_2 \cup_{\text{colagem}} T_3$ é conexo. Continue o processo até envolver todos os triângulos da superfície S . Como S é conexa, esse processo continuará contando que tenham arestas e triângulos livres.

(\Leftarrow) Vamos provar a contra-positiva. Seja S uma superfície não conexa, então S tem, pelo menos, duas componentes conexas. Seja T_1, T_2, \dots, T_k os triângulos da primeira componente conexa de S e $T_{k+1}, T_{k+2}, \dots, T_n$ os triângulos da segunda componente conexa. Note que T_{k+1} não está colado a nenhum dos triângulos T_1, T_2, \dots, T_k , pois eles estão em componentes conexas diferentes. Portanto, não podemos colocar os triângulos na ordem T_1, T_2, \dots, T_n com cada triângulo tendo pelo menos uma aresta identificada com o triângulo seguinte na sequência. \square

2.4 Classificação de superfícies

Agora, vamos caracterizar completamente todas as superfícies compactas sem fronteira.

Teorema 2.16 *Toda superfície compacta e conexa é homeomorfa ou a uma esfera, ou a soma conexa de toros ou a soma conexa de planos projetivos.*

Demonstração:

Passo 1: Construção de um modelo planar para a superfície

Seja S uma superfície, suponha que S é representada por um complexo triangulado. Como S é uma superfície compacta, então, pelo Teorema (2.14), todo complexo simplicial em S tem somente um número finito de triângulos. Como S é conexa, então, pelo Teorema (2.15), temos que a lista de triângulos pode ser colocada numa ordem de modo que cada triângulo é colado ao seu sucessor na ordem. Existem diversas maneiras de ordenar os triângulos, então coloque-os em uma ordem qualquer para formar o polígono que é a representação planar da superfície. Os vértices externos do polígono devem ser colados para formar a superfície. Como S é um superfície, cada aresta é identificada a exatamente uma outra aresta. As arestas do interior já estão identificadas, então as externas devem ser identificadas em pares.

Passo 2: Um atalho

Se uma sequência de arestas ocorre duas vezes exatamente na mesma ordem, levando em consideração as direções das arestas, podemos juntar todas as arestas dessa sequência em uma única aresta, como ilustra a Figura (2.7)

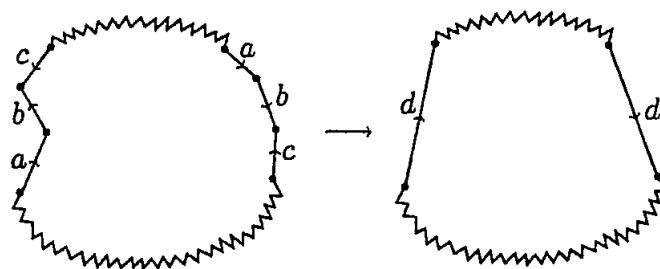


Figura 2.7: Simplificando um rótulo.

Fonte: [7], p. 80.

Note que arestas podem ocorrer de duas formas: *pares opostos* ou *pares torcidos*. Se percorrermos ao longo do perímetro em qualquer sentido, pares torcidos aparecerão

na mesma direção, enquanto que pares opostos aparecerão com direções opostas.

Passo 3: Eliminando pares opostos adjacentes

Pares opostos adjacentes podem ser eliminados colando-os juntos, como ilustra a Figura (2.8)

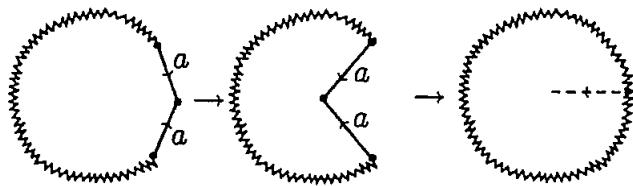


Figura 2.8: Eliminando pares opostos adjacentes.

Fonte: [7], p. 81.

Note que se existem somente arestas formando pares opostos adjacentes, então a superfície S é uma esfera \mathbb{S}^2 .

Passo 4: Eliminando todos a menos de um vértice

Escolha qualquer um dos vértices presentes no polígono e realize o processo que remove os outros vértices um a um, como ilustra a Figura (2.9)

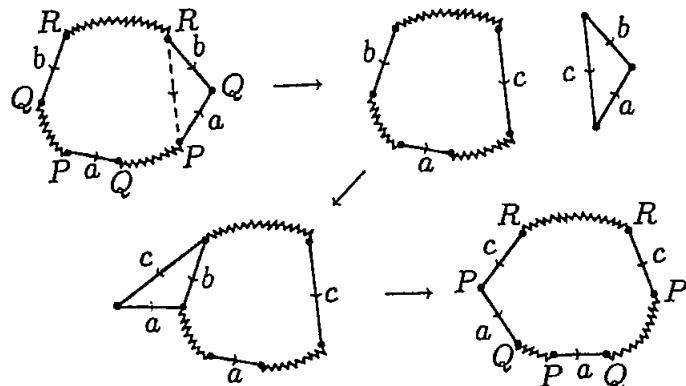


Figura 2.9: Eliminando o vértice Q a favor do vértice P .

Fonte: [7], p. 82.

Assim, ao remover um vértice específico será adicionado mais um vértice com um rótulo diferente daquele que foi escolhido para ser removido. Repetimos esse processo até sobrarem apenas vértices com o mesmo rótulo.

Passo 5: Coletando pares torcidos

Podemos fazer pares torcidos de arestas tornarem-se pares torcidos adjacentes e então eliminá-los, como ilustra a Figura (2.10)

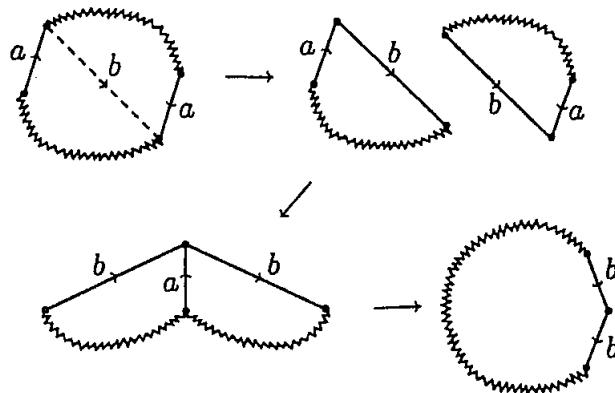


Figura 2.10: Colocando pares torcidos juntos.

Fonte: [7], p. 83.

Se, após completarmos esse passo tantas vezes quanto necessário, não existirem mais arestas de nenhum outro tipo, então a superfície S é a soma conexa de planos projetivos \mathbb{P}^2 .

Passo 6: Coletando pares de pares opostos

Se os Passos 1 e 5 foram realizados, então quaisquer pares opostos devem aparecer em pares. Então podemos fazer pares opostos de arestas aparecerem juntos, como ilustra a Figura (2.11)

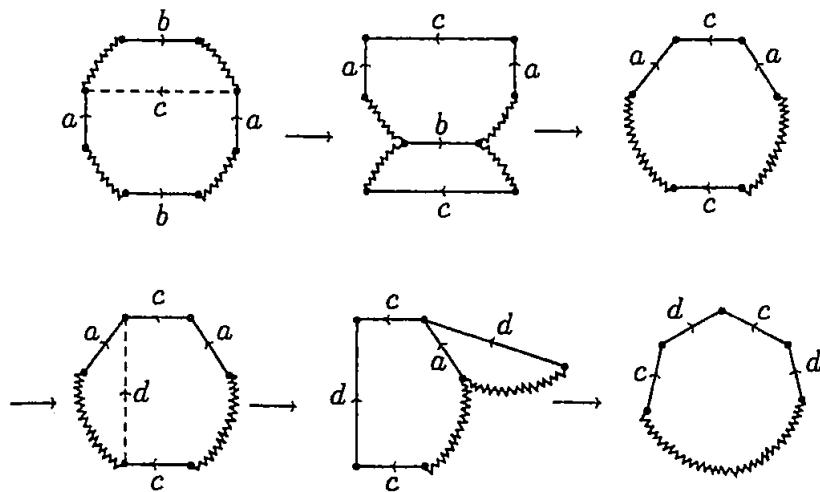


Figura 2.11: Colocando pares opostos juntos.

Fonte: [7], p. 84.

Se ao realizar o processo para coletar pares opostos tantas vezes quanto necessário não existirem pares torcidos de arestas, então a superfície S é a soma conexa de to-

ros \mathbb{T}^2 .

Passo 7: Combinações de \mathbb{T}^2 e \mathbb{P}^2

Nesse ponto, ou a superfície já foi classificada ou o diagrama planar contém emparelhamentos de pares torcidos e opostos, então a superfície é a soma conexa de planos projetivos e toros. Esse caso é resolvido utilizando a seguinte igualdade $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, como ilustra a Figura (2.12).

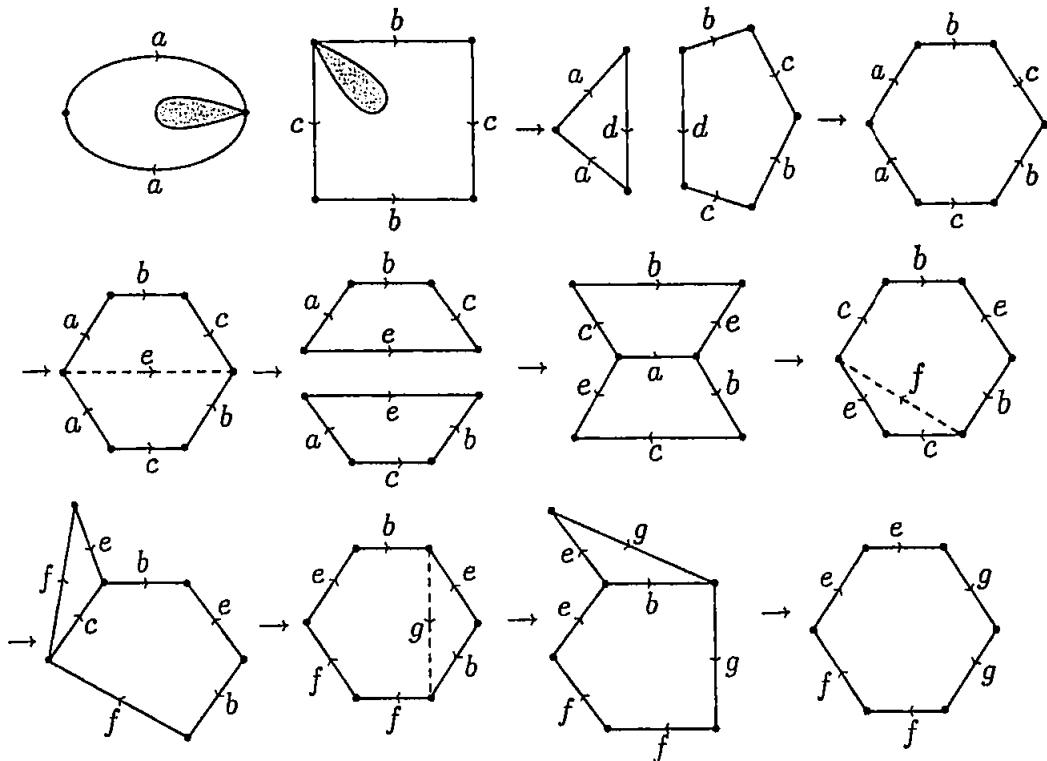


Figura 2.12: $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.

Fonte: [7], p. 85.

Assim, a combinação de toros e planos projetivos podem ser convertidas na soma conexa de planos projetivos somente. \square

Uma superfície triangulada com fronteira é um espaço topológico obtido de um conjunto de triângulos com arestas e vértices identificados como os das superfícies da Definição (2.13), exceto para alguns vértices e arestas que não são identificados. Essas arestas não identificadas formam a fronteira da superfície. Superfícies com fronteira podem ser classificadas através de uma extensão do Teorema (2.16). Primeiramente, vamos dar uma definição combinatorial para superfícies com fronteira.

Definição 2.17 Uma superfície triangulada com fronteira é um espaço com um 2-complexo simplicial tal que:

1. Cada aresta no interior é identificada com exatamente uma outra aresta;
2. Em cada conjunto β_k dos triângulos que possuem apenas um vértice em comum V , podemos rotular esses triângulos por $T_{1_k}, T_{2_k}, \dots, T_{n_k}$, onde n_k é o número de triângulos em β_k . Além disso, uma aresta de T_{1_k} que contém o vértice V será identificada apenas com uma aresta de T_{2_k} . A outra aresta de T_{2_k} que contém o vértice V será identificada apenas com uma aresta de T_{3_k} e, assim, sucessivamente, até que identifiquemos a aresta restante de T_{n_k} com uma aresta de T_{1_k} .
3. Nenhuma aresta que não está na fronteira pode ter ambos os vértices na fronteira.

A condição (3) da Definição (2.17) é adicionada para que seja possível identificar claramente os vértices e arestas que estão na fronteira. Se os vértices A e B estão na fronteira, então a aresta AB deve estar na fronteira.

Teorema 2.18 Uma superfície compacta e conexa com fronteira é topologicamente equivalente ou a uma esfera, ou a soma conexa de toros ou a soma conexa de planos projetivos, com um número finito de discos abertos removidos.

Demonstração: Aplicando uma subdivisão baricêntrica, se necessário, no complexo simplicial podemos garantir que a Definição (2.17) será satisfeita. Construa um modelo planar para a superfície. Cole todos os triângulos que possuem vértices ou arestas na fronteira para formar o diagrama planar da região da superfície que envolve a fronteira. Se a fronteira tem mais de uma componente será necessário fazer esse processo mais de uma vez. Posteriormente, cole todos esse diagramas planares e triângulos que não estão na fronteira para formar o diagrama da superfície, o qual terá buracos no interior. As outras arestas estão identificadas aos pares. Realize os passos da demonstração do Teorema (2.16) tomando cuidado para não cortar nenhuma componente da fronteira. Como no Teorema (2.16) obtemos as formas desejadas, mas com buracos topologicamente equivalentes a discos. \square

2.5 Invariantes topológicos

No Teorema (2.16) provamos que todas as superfícies sem fronteira podem ser classificadas em três tipos: a esfera, somas conexas de toros e somas conexas de planos projetivos. Nós não provamos, ainda, que esses três tipos de superfícies são

realmente diferentes e esse é o nosso próximo objetivo. Vamos introduzir um simples invariante topológico: a característica de Euler. Esse é o primeiro passo para a algebrização da topologia: encontrar alguma ferramenta algébrica que caracteriza a estrutura topológica do espaço.

Definição 2.19 *Uma quantidade α é um invariante topológico se, sempre que X e Y forem topologicamente equivalentes, então $\alpha(X) = \alpha(Y)$.*

Idealmente, gostaríamos de um invariante topológico que satisfaça a condição de que se $\alpha(X) = \alpha(Y)$, então X e Y são topologicamente equivalentes. Veremos que a característica de Euler é muito simples para conseguir isso.

2.6 Grafos

Antes de tentarmos estabelecer invariantes topológicos em superfícies, vamos considerar $1-complexos$.

Definição 2.20 *Um grafo, Γ , é um $1-complexo$ conexo.*

Grafos são constituídos somente de vértices e arestas. Quaisquer dois vértices em um grafo são conectados por algum caminho ao longo das arestas e vértices do grafo. A Figura (2.13) exibe alguns exemplos de grafos.

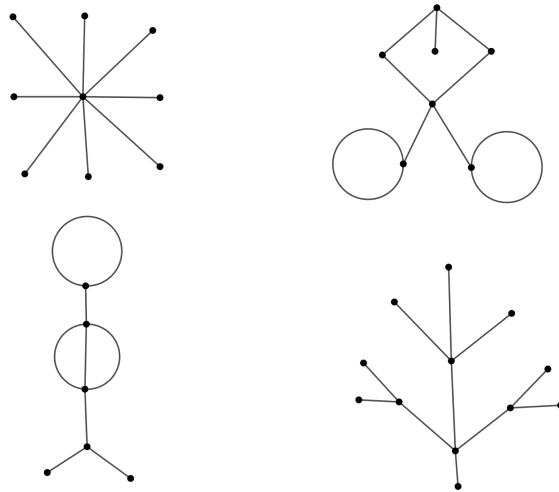


Figura 2.13: Exemplos de grafos.

Note que alguns grafos da Figura (2.13) tem *loops* ou *ciclos*: caminhos em um grafo que começam e terminam em um mesmo vértice.

Definição 2.21 Uma árvore, T , é um grafo que não possui ciclos.

Gostaríamos de definir um invariante topológico que possa distinguir as árvores dos outros tipos de grafos.

Definição 2.22 Seja Γ um grafo, definimos por $\chi(\Gamma) \doteq v - e$, onde v é o número de vértices e e é o número de arestas, a característica de Euler de Γ .

Teorema 2.23 Seja T uma árvore. Então $\chi(T) = 1$.

Demonstração: Faremos um prova por indução no número de arestas de T . Note que se $e = 0$, então a árvore T consiste de um único vértice, assim $v = 1$. Nesse caso, $\chi(T) = v - e = 1 - 0 = 1$. Assuma que o teorema seja verdadeiro para todas as árvores com menos de n arestas, e seja T uma árvore tal que $e = n$. Seja a uma aresta arbitrária, remova a aresta a da árvore T e, note que, teremos duas árvores desconexas T_1 e T_2 . Como ilustra a Figura (2.14).

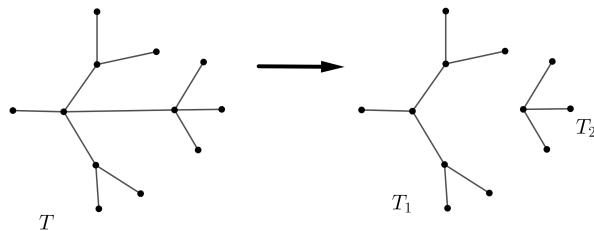


Figura 2.14: Remover aresta de uma árvore.

Note que esse fato segue de que se $T \setminus \{a\}$ não for desconexo, então existe outra aresta conectando os pontos desconectados em $T \setminus \{a\}$. Entretanto, essa aresta juntamente com a aresta a formam um loop e isso contradiz o fato de que T é uma árvore. Assim as árvores T_1 e T_2 tem menos de n arestas, então pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\chi(T_1) &= v_1 - e_1 = 1 \\ \chi(T_2) &= v_2 - e_2 = 1\end{aligned}$$

Note que cada vértice de T está ou em T_1 ou em T_2 , mas não em ambos, assim, $v = v_1 + v_2$. As arestas de T consistem na aresta a , nas arestas de T_1 e nas arestas de T_2 , então $e = 1 + e_1 + e_2$. Então,

$$\begin{aligned}\chi(T) &= v - e \\ &= (v_1 + v_2) - (1 + e_1 + e_2) \\ &= (v_1 - e_1) + (v_2 - e_2) - 1 \\ &= 1 + 1 - 1 = 1.\end{aligned}$$

□

Todas as árvores tem a mesma característica de Euler. Entretanto, isso não nos mostra que todas as árvores são topologicamente equivalentes, mas nos mostra alguma coisa sobre a forma das árvores. O próximo teorema nos dará informações sobre a característica de Euler para grafos que contém loops.

Teorema 2.24 *Seja Γ um grafo com n loops (ou ciclos) distintos. Então $\chi(\Gamma) = 1 - n$.*

Demonstração: Para cada um dos n ciclos em Γ , podemos remover uma aresta sem desconectar o grafo, pois cada ciclo implica em uma redundância de caminhos entre dois vértices. Após fazermos isso, teremos um novo grafo sem nenhum ciclo, ou seja, uma árvore T . Assim, pelo Teorema (2.23), $\chi(T) = 1$. Note que a árvore T não é única, mas ela contém todos os vértices de Γ , com n arestas a menos. Consequentemente,

$$1 = \chi(T) = v - (e - n) = (v - e) + n = \chi(\Gamma) + n.$$

Portanto, $\chi(\Gamma) = 1 - n$. □

A característica de Euler não mostra uma descrição precisa do grafo, mas nos mostra informação importantes sobre sua forma. O próximo teorema nos mostra que a característica de Euler é um invariante topológico.

Teorema 2.25 *Sejam Γ_1 e Γ_2 grafos topologicamente equivalentes. Então $\chi(\Gamma_1) = \chi(\Gamma_2)$.*

Demonstração: Por hipótese, temos que $|\Gamma_1|$ e $|\Gamma_2|$ são homeomorfos. Um vértice que se conecta somente com uma aresta será chamado de **vértice final**. Um vértice com mais de duas arestas (neste caso, arestas que começam e terminam no mesmo vértice contam duas vezes) será chamado de **vértice ramificado**. Note que homeomorfismos levam vértices finais em vértices finais e vértices ramificados em vértices

ramificados com o mesmo número de arestas neles. Assim, os vértices finais e os vértices ramificados de Γ_1 e Γ_2 coincidem. Seja Γ um grafo obtido adicionando os vértices de Γ_1 em Γ_2 , ou vice-versa. Note que adicionar vértices no meio de uma aresta não muda a característica de Euler do grafo. Assim, Γ_1 e Γ_2 tem a mesma característica de Euler de Γ , então $\chi(\Gamma_1) = \chi(\Gamma_2)$. \square

2.7 A característica de Euler e o problema de colorir mapas

Vamos definir a característica de Euler, que é um importante invariante topológico, de uma maneira mais generalizada.

Definição 2.26 *A característica de Euler de um complexo K de dimensão n é dada por*

$$\chi(K) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \#k,$$

onde $\#k$ é o número de k -células em um complexo K .

Em particular, se considerarmos $2 - \text{complexos}$, ou seja, superfícies, obtemos a seguinte fórmula para a característica de Euler

$$\chi(K) = v(K) - e(K) + f(K),$$

onde K é um $2 - \text{complexo}$, $v(K)$ é o número de vértices de K , $e(K)$ o número de arestas de K e $f(K)$ o numero de faces de K .

Teorema 2.27 *Se $|K|$ e $|L|$ são superfícies compactas, conexas e $|K| \cong |L|$, então $\chi(K) = \chi(L)$.*

Definição 2.28 *Se S é uma superfície compacta, conexa e $S \cong |K|$ para um complexo K , defina $\chi(S) \doteq \chi(K)$.*

Pelo Teorema (2.27) temos que $\chi(S)$ está bem definida, e posteriormente, que a característica de Euler de uma superfície é um invariante topológico.

O próximo resultado relaciona a característica de Euler da soma conexa de superfícies com a característica de Euler de ambas as superfícies.

Corolário 2.29 $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.

A Tabela (2.2) nos fornece a característica de Euler de algumas superfícies.

Superfície	χ
\mathbb{S}^2	2
$n\mathbb{T}^2$	0
\mathbb{K}^2	0
$n\mathbb{P}^2$	1
Faixa de Möbius	2

Tabela 2.2: Característica de Euler de algumas superfícies.

Teorema 2.30 *Toda superfície compacta e conexa é homeomorfa a exatamente uma das seguintes: \mathbb{S}^2 , $n\mathbb{T}^2$, ou $n\mathbb{P}^2$*

Demonstração: Pelo Teorema da classificação de superfícies (2.16) é suficiente mostrar que \mathbb{S}^2 , $n\mathbb{T}^2$, e $n\mathbb{P}^2$ são topologicamente distintas. Pela Tabela (2.2) e Corolário (2.29), temos que:

1. $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$;
2. $\chi(n\mathbb{T}^2) = 2 - 2n$;
3. $\chi(n\mathbb{P}^2) = 2 - n$.

O único caso de sobreposição ocorre quando $\chi(n\mathbb{T}^2) = \chi(2n\mathbb{P}^2)$. Em outras palavras, pelo Teorema (2.27), precisamos mostrar que $n\mathbb{T}^2$ não é homeomorfa a $2n\mathbb{P}^2$. De fato, observe que $n\mathbb{T}^2$ tem um campo vetorial normal contínuo apontando para fora com $n\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$, e então $n\mathbb{T}^2$ não contém uma faixa de Möbius. Contudo, \mathbb{P}^2 contém uma faixa de Möbius, e então $\mathbb{P}^2 \# S$ também contém uma faixa de Möbius para qualquer superfície S . Em particular, $2n\mathbb{P}^2$ contém uma faixa de Möbius, e consequentemente $n\mathbb{T}^2$ não é homeomorfa a $2n\mathbb{P}^2$. \square

Agora temos as ferramentas para identificar e distinguir superfícies. Com o Teorema da classificação de superfícies (2.16), mostramos que todas as superfícies podem ser reduzidas a um dos três tipos. Com os Teoremas (2.27) e (2.30), mostramos que essas três classes de superfícies são as únicas superfícies compactas e conexas distintas.

A seguir daremos uma aplicação para a característica de Euler.

Um mapa geográfico pode ser visto como um complexo com vértices, arestas e faces. O problema é colorir o mapa.

Definição 2.31 Uma coloração boa de um mapa é uma tal que faces adjacentes não possuem a mesma cor.

Queremos saber o número de cores necessárias para que exista uma coloração boa para um mapa. O Lema (2.32), cuja demonstração pode ser encontrada em [7], nos dá um limite superior para esse número.

Lema 2.32 Seja S uma superfície, $S = |K|$, onde o complexo K tem $e(K)$ arestas e $f(K)$ faces. Se $\frac{2e(K)}{f(K)} < N$, então N cores são suficientes para colorir o mapa em S determinado por K .

Agora temos um limite superior para o número de cores de uma coloração boa em uma superfície em termos da quantidade de arestas e faces do complexo associado a essa superfície. A seguir mostraremos a relação entre $\frac{2e}{f}$ e a característica de Euler. Para tanto, utilizaremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

Lema 2.33 Seja $v(K)$ o número de vértices do complexo K e $e(K)$ o número de arestas. Então, $v(K) \leq \frac{2e(K)}{3}$.

Teorema 2.34 Seja S uma superfície e K um complexo arbitrário em S com $e(K)$ arestas e $f(K)$ faces, então

$$\frac{2e(K)}{f(K)} \leq 6 \left(1 - \frac{\chi(S)}{f(K)}\right).$$

Demonstração: Pelo Lema (2.33) temos que $\chi(S) - f(K) = v(K) - e(K) \leq \frac{-e(K)}{3}$. Consequentemente, $3(f(K) - \chi(S)) \geq e(K)$. Dividindo ambos os lados por $f(K)$ temos o resultado desejado. \square

Teorema 2.35 Sejam S uma superfície compacta e conexa, e $N(S)$ o número mínimo de cores necessárias para colorir todos os mapas em S . Então, $N(\mathbb{T}^2) = 7$ e $N(\mathbb{P}^2) = 6$.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que $N(\mathbb{T}^2) \leq 7$ e $N(\mathbb{P}^2) \leq 6$. De fato, para o toro, pelo Teorema (2.34), temos que $\frac{2e(K)}{f(K)} \leq 6$. Consequentemente, pelo

Lema (2.32), 7 cores são suficientes para colorir qualquer mapa no toro. Analogamente para o plano projetivo, $N(\mathbb{P}^2) \geq 6 \left(1 - \frac{\chi(S)}{f(K)}\right)$. Então, 6 cores são suficientes. A necessidade é pode ser observada na Figura (2.15).

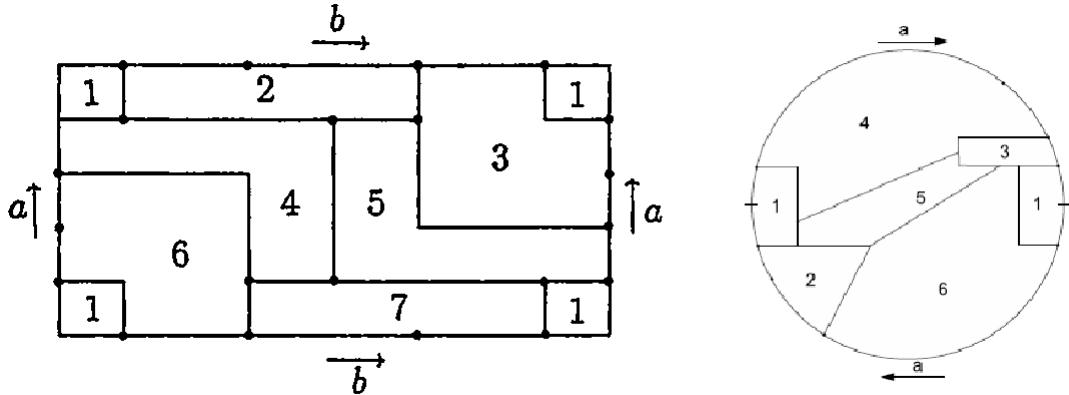


Figura 2.15: Um mapa no toro com 7 cores e um mapa no plano projetivo com 6 cores.

Fonte: [7], p. 112.

Note que cada face é adjacente a outra face, e então esse mapa ilustra a necessidade. Portanto, $N(\mathbb{T}^2) = 7$ e $N(\mathbb{P}^2) = 6$ como desejado. \square

2.8 A álgebra de cadeias

Definição 2.36 Um 2-complexo é direcionado se a cada aresta ou 1-célula é dada uma orientação (do ponto inicial ao ponto final) e a cada polígonos ou 2-célula é dada uma orientação (horário ou anti-horário).

Note que a escolha de orientação para as arestas e polígonos é arbitrária, assim um complexo pode ser orientado de diversas maneiras.

Definição 2.37 Seja K um complexo orientado. Uma k -cadeia C (inteira) em K é a soma

$$C = a_1\sigma_1 + \cdots + a_n\sigma_n,$$

onde $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ são k -células em K e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Além disso, definimos, $0\sigma = \emptyset \forall \sigma \in K$.

Exemplo 2.38 Considere o seguinte complexo orientado no toro dado na Figura (2.16).

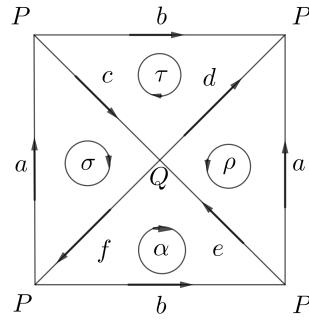


Figura 2.16: Complexo orientado no toro.

Alguns exemplos de cadeias para o complexo definido na Figura (2.16) são:

- As 0-cadeia $2P, 0P = \emptyset, -P, P + Q, \dots$
- As 1-cadeia $2a, -b, 3c, 2a - b + 3c, \dots$
- As 2-cadeia $2\sigma, \tau - 3\rho, \sigma + \tau + \rho, \dots$

No que segue, vamos definir uma aritmética para as k -cadeias.

Definição 2.39 Sejam C e D duas k -cadeias em um complexo orientado K tais que

$$C = a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n \text{ e } D = b_1\sigma_1 + \dots + b_n\sigma_n.$$

A soma $C + D$ é definida por

$$C + D \doteq (a_1 + b_1)\sigma_1 + \dots + (a_n + b_n)\sigma_n.$$

Teorema 2.40 Sejam C_1, C_2 e C_3 k -cadeias em um complexo orientado K . Então valem

- (1) $C_1 + C_2 = C_2 + C_1;$
- (2) $(C_1 + C_2) + C_3 = C_1 + (C_2 + C_3);$
- (3) $C_1 + \emptyset = C_1;$
- (4) $C_1 - C_1 = \emptyset.$

Demonstração: A demonstração segue para cada item,

2 Parte 2

(1) Sejam $C_1 = a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n$, $C_2 = b_1\sigma_1 + \dots + b_n\sigma_n$ e $C_3 = c_1\sigma_1 + \dots + c_n\sigma_n$. Por definição temos que

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= (a_1 + b_1)\sigma_1 + \dots + (a_n + b_n)\sigma_n \\ &= (b_1 + a_1)\sigma_1 + \dots + (b_n + a_n)\sigma_n \\ &= C_2 + C_1. \end{aligned}$$

(2) Sejam C_1 , C_2 e C_3 como em (1). Por definição temos que

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2) + C_3 &= ((a_1 + b_1)\sigma_1 + \dots + (a_n + b_n)\sigma_n) + (c_1\sigma_1 + \dots + c_n\sigma_n) \\ &= ((a_1 + b_1) + c_1)\sigma_1 + \dots + ((a_n + b_n) + c_n)\sigma_n \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1))\sigma_1 + \dots + (a_n + (b_n + c_n))\sigma_n \\ &= (a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n) + ((b_1 + c_1)\sigma_1 + \dots + (b_n + c_n)\sigma_n) \\ &= C_1 + (C_2 + C_3). \end{aligned}$$

(3) Seja C_1 como em (1). Note que por definição, $\emptyset = 0\sigma_1 + \dots + 0\sigma_n$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} C_1 + \emptyset &= (a_1 + 0)\sigma_1 + \dots + (a_n + 0)\sigma_n \\ &= a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n \\ &= C_1. \end{aligned}$$

(4) Seja C_1 como no em (1). Por definição temos que

$$\begin{aligned} C_1 - C_1 &= (a_1 - a_1)\sigma_1 + \dots + (a_n - a_n)\sigma_n \\ &= 0\sigma_1 + \dots + 0\sigma_n \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

□

Definição 2.41 Seja K um complexo orientado. Vamos denotar o grupo de todas as k -cadeias em K por $C_k(K) \doteq (C_k(K), +)$ para $k = 1, 2, \dots, \dim(K)$.

Note que $C_k(K)$ é um grupo abeliano, segue diretamente do Teorema (2.40). Note também que para complexos finitos, em particular toda superfície do teorema de classificação, os grupos $C_k(K)$ serão finitamente gerados, e então, $C_k(K)$ será um grupo da forma $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$.

Definição 2.42 A fronteira de uma k -célula σ , denotada por $\partial(\sigma)$, é a $(k-1)$ -cadeia com todas as $(k-1)$ -células que são faces de σ , com direção herdada da orientação de σ .

A fronteira de uma 0-célula é definida com o conjunto vazio. Sendo P uma 0-célula, então $\partial(P) = \emptyset$. Estendendo por linearidade, podemos definir a fronteira de uma cadeia.

Definição 2.43 Seja C uma k -cadeia, então $C = a_1\sigma_1 + \cdots + a_n\sigma_n$. A fronteira de C é definida por

$$\partial(C) \doteq a_1\partial(\sigma_1) + \cdots + a_n\partial(\sigma_n).$$

O operador fronteira pega uma k -cadeia e nos da uma $(k-1)$ -cadeia. Então, esse operador pode ser definido como uma função

$$\partial : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K) \tag{2.1}$$

que definida desta maneira é um homomorfismo para qualquer complexo K . A proposta de desenvolver tal operador é a de que ele nos de alguma informação sobre a forma do complexo. Entretanto, note que, geometricamente, quando $\partial(\sigma) = \emptyset$ não significa que a célula não tem fronteira, mas sim que as arestas de sua fronteira se cancelam.

Definição 2.44 Se C é uma k -cadeia em um complexo orientado K e $\partial(C) = \emptyset$ então C é um k -ciclo. O conjunto de todos os k -ciclos em K é denotado por $Z_k(K)$.

Note que $Z_k(K) \subset C_k(K)$ e o grupo $(Z_k(K), +)$ é um subgrupo de $(C_k(K), +)$. Além disso, $Z_k(K)$ é o núcleo do homomorfismo (2.1). As 1-células que formam loops parecem ser importantes, visto que a presença desses loops em grafos determina a característica de Euler do mesmo. Assim, podemos definir as k -fronteiras.

Definição 2.45 Se C é um k -cadeia em um complexo orientado K tal que existe uma $(k+1)$ -cadeia D com $\partial(D) = C$, então C é uma k -fronteira. O conjuntos de todas as k -fronteiras em K é denotado por $B_k(K)$.

Note que $B_k(K) \subset C_k(K)$ e o grupo $(B_k(K), +)$ é um subgrupo de $(C_k(K), +)$. Além disso, $B_k(K)$ é a imagem do homomorfismo (2.1).

2.9 Complexos simpliciais

A partir de agora, vamos considerar os complexos simpliciais, os quais possuem apenas células triangulares, os quais possuem algumas vantagens teóricas.

Por exemplo, um k -simplexo sempre tem $k+1$ vértices, mas em um complexo não simplicial nem sempre se verifica isso, um polígono pode ter um número qualquer de vértices. Então, o número de vértices nos dá imediatamente a dimensão do simplexo. Além disso, a ordenação dos vértices nos dá uma orientação natural para o simplexo. Vamos denotar por $\langle v_0 \rangle$ um vértice ou 0 -simplexo v_0 ; $\langle v_0, v_1 \rangle$ a aresta ou 1 -simplexo com orientação de v_0 para v_1 ; $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ é o 2 -simplexo com vértices v_0, v_1 e v_2 orientados nessa ordem. Um 3 -simplexo $\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ é orientado por uma hélice orientada pela ordem dos vértices. Um n -simplexo é denotado por $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$. Mudando a ordem dos vértices mudamos a orientação do simplexo. As faces de um n -simplexo $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ irão ser todos os $(n-1)$ -simplexos formados por esses vértices. Esses $(n-1)$ -simplexos irão ter $n-1$ vértices escolhidos de v_0, v_1, \dots, v_n , então podemos denotar um desses $(n-1)$ -simplexos por $\langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_k}, \dots, v_n \rangle$, onde $\overline{v_k}$ é o vértice omitido. Assim, a fronteira de um n -simplexo é dada por

$$\partial(\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_k}, \dots, v_n \rangle$$

Essas regras podem simplificar a demonstração de alguns teoremas, especialmente em dimensão maior que dois.

Lema 2.46 Se σ é um n -simplexo, então $\partial \circ \partial(\sigma) = \partial(\partial(\sigma)) = \emptyset$.

Demonstração: Seja σ um n -simplexo tal que

$$\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \partial \circ \partial(\sigma) &= \partial \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_k}, \dots, v_n \rangle \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \partial(\langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_k}, \dots, v_n \rangle) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_i}, \dots, \overline{v_k}, \dots, v_n \rangle + \sum_{i=k+1}^n (-1)^i \langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_k}, \dots, \overline{v_i}, \dots, v_n \rangle \right) \\
 &= \sum_{i < k \leq n} (-1)^{k+i} \langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_i}, \dots, \overline{v_k}, \dots, v_n \rangle + \sum_{i < k \leq n} (-1)^{k+i-1} \langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_k}, \dots, \overline{v_i}, \dots, v_n \rangle \\
 &= \sum_{k \neq i} \left((-1)^{k+i} + (-1)^{k+i-1} \right) \langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_k}, \dots, \overline{v_i}, \dots, v_n \rangle \\
 &= \sum_{k \neq i} 0 \langle v_0, v_1, \dots, \overline{v_k}, \dots, \overline{v_i}, \dots, v_n \rangle \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.47 A composição $\partial \circ \partial : C_k(K) \rightarrow C_{k-2}(K)$ satisfaz $\partial \circ \partial(C) = \emptyset$ para qualquer k -cadeia em um complexo K .

Demonstração: Vamos assumir que o complexo está triangulado. Seja $C = a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n$ uma k -cadeia em K , onde $a_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e σ_i é um k -simplexo em K $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \partial(C) &= \partial(a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n) \\
 &= a_1\partial(\sigma_1) + \dots + a_n\partial(\sigma_n)
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 \partial(\partial(C)) &= \partial(a_1\partial(\sigma_1) + \dots + a_n\partial(\sigma_n)) \\
 &= a_1\partial(\partial(\sigma_1)) + \dots + a_n\partial(\partial(\sigma_n))
 \end{aligned}$$

Pelo Lema (2.46), como σ_i é um simplexo $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que $\partial(\partial(\sigma_i)) = \emptyset$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\partial(\partial(C)) &= a_1 \partial(\partial(\sigma_1)) + \cdots + a_n \partial(\partial(\sigma_n)) \\
&= a_1 \emptyset + \cdots + a_n \emptyset \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.48 Como consequência direta do Teorema (2.47) temos que toda k -fronteira é um k -ciclo.

2.10 Grupos de homologia

Uma observação sobre os grupos C_k , Z_k e B_k é que eles dependem muito do complexo que estamos trabalhando e isso torna obscuro o entendimento do espaço. Buscamos uma maneira de obter somente os fatos essenciais sobre a forma do espaço. Dois complexos diferentes sobre o toro podem dar dois grupos de cadeias totalmente diferentes. Gostaríamos de dizer que ambos os espaços tem a mesma forma. Note que um 2 -ciclo pode descrever uma cadeia cujas arestas são coletadas juntas para formar uma cavidade vazia. Os 1 -ciclos são arestas que formam loops. Uma cadeia, na qual não existem ciclos, não pode-se ter uma cavidade ou loop. Assim, os ciclos parecem ter uma importância especial no sentido de determinar a forma do espaço. Por outro lado, alguns ciclos parecem ser redundantes.

Estamos tentando fazer algebricamente o que o teorema da classificação faz geometricamente, ou seja, encontrar maneiras de filtrar informações não tão relevantes.

Definição 2.49 Dizemos que duas k -cadeias C_1 e C_2 são homólogas, escrevemos $C_1 \sim C_2$, se $C_1 - C_2 \in B_k(K)$, ou seja, se $C_1 - C_2 = \partial(D)$ para alguma $(k+1)$ -cadeia D .

Teorema 2.50 Seja K um complexo, com C_1, C_2, C_3 e C_4 cadeias em $C_k(K)$. Então, vale que

- (1) $C_1 \sim C_1$;
- (2) Se $C_1 \sim C_2$, então $C_2 \sim C_1$;
- (3) Se $C_1 \sim C_2$ e $C_2 \sim C_3$, então $C_1 \sim C_3$;
- (4) Se $C_1 \sim C_2$ e $C_3 \sim C_4$, então $C_1 + C_3 \sim C_2 + C_4$.

Demonstração: A demonstração segue para cada item,

- (1) Vamos mostrar que existe uma $(k+1)$ -cadeia D tal que $\partial(D) = C_1 - C_1$. Note que, pelo Teorema (2.40), temos que $C_1 - C_1 = \emptyset$. Portanto, considere $\emptyset \in C_{k+1}(K)$. Assim, $\partial(\emptyset) = \emptyset$, portanto, $C_1 - C_1 = \emptyset \in B_k(K)$.
- (2) Suponha que $C_1 \sim C_2$, vamos mostrar que existe uma $(k+1)$ -cadeia E tal que $\partial(E) = C_2 - C_1$. Note que, por hipótese, $C_1 \sim C_2$, ou seja, existe $D \in C_{k+1}(K)$ tal que $\partial(D) = C_1 - C_2$. Considere $E = -D$, note que $E \in C_{k+1}(K)$, além disso, $\partial(E) = \partial(-D) = -(C_1 - C_2) = C_2 - C_1$. Logo, $C_2 \sim C_1$.
- (3) Suponha que $C_1 \sim C_2$ e $C_2 \sim C_3$, vamos mostrar que existe uma $(k+1)$ -cadeia D tal que $\partial(D) = C_1 - C_3$. De fato, existem $E, F \in C_{k+1}(K)$ tais que $\partial(E) = C_1 - C_2$ e $\partial(F) = C_2 - C_3$. Considere $D = E + F$, assim, $\partial(D) = \partial(E + F) = \partial(E) + \partial(F) = (C_1 - C_2) + (C_2 - C_3) = C_1 - C_3$. Logo, $C_1 \sim C_3$.
- (4) Suponha que $C_1 \sim C_2$ e $C_3 \sim C_4$, vamos mostrar que existe uma $(k+1)$ -cadeia D tal que $\partial(D) = (C_1 + C_3) - (C_2 + C_4)$. De fato, existem $E, F \in C_{k+1}(K)$ tais que $\partial(E) = C_1 - C_2$ e $\partial(F) = C_3 - C_4$. Considere $D = E + F$, assim, $\partial(D) = \partial(E + F) = \partial(E) + \partial(F) = (C_1 - C_2) + (C_3 - C_4) = (C_1 + C_3) - (C_2 + C_4)$. Logo, $C_1 + C_3 \sim C_2 + C_4$.

□

Note que as condições do Teorema (2.50) mostram que \sim é uma relação de equivalência e, além disso, que \sim funciona bem em conjunto com a adição de cadeias.

Definição 2.51 Seja K um complexo direcionado. O k -ésimo grupo de homologia de K é definido pelo

$$H_k(K) \doteq Z_k(K) / B_k(K),$$

ou seja, o grupo das classes de equivalência dos elementos de $Z_k(K)$ com relação a homologia. Em outras palavras, $H_k(K)$ é $Z_k(K)$ com homologia usada como igualdade.

Os grupos de homologia combinam todas as informações essenciais que temos coletado, ou seja, quais células formam loops ou cavidades e, além disso, dispensa informações repetidas. O processo para encontrarmos $H_k(K)$ pode ser feito da seguinte maneira.

Cálculo de $H_k(K)$ para um complexo orientado K :

Primeiramente, rotulemos e indiquemos uma orientação para todas as células do

complexo. Façamos os cálculos para uma dimensão por vez, começando pela maior.

- (1) Encontre $C_k(K)$, o grupo de todas as k -cadeias;
- (2) Para cada k -cadeia C geradora de (1), calcule $\partial(C)$;
- (3) Encontre $Z_k(K)$, usando os cálculos de (2);
 - (1) Note que se $Z_k(K) = \{\emptyset\}$, então $H_k(K) = \{\emptyset\}$;
- (4) Encontre $B_k(K)$;
 - (1) Quando estamos na dimensão mais alta, note que $B_k(K) = \{\emptyset\}$, pois não existem $(k+1)$ -cadeias para umas das k -cadeias serem fronteira;
 - (2) Caso não estivermos na dimensão mais alta, voltemos para (2), onde já temos calculado quais k -cadeias são fronteiras de $(k+1)$ -células;
 - (3) Note que se $B_k(K) = \{\emptyset\}$, então $H_k(K) = Z_k(K)$;
- (5) Calcule $H_k(K)$, tomando $Z_k(K)$ e qualquer homologia $B_k(K)$ encontrada.

Agora, vamos fazer um exemplo para ilustrar o processo descrito acima.

Exemplo 2.52 Vamos calcular os grupos de homologia para a garrafa de Klein (\mathbb{K}^2) com um complexo dado como na Figura (2.17).

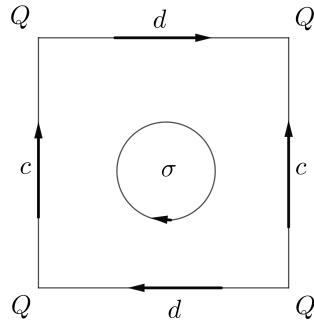


Figura 2.17: Complexo orientado na garrafa de Klein.

Vamos calcular $H_2(\mathbb{K}^2)$. Note que $C_2(\mathbb{K}^2) = \{k\sigma : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Além disso, $\partial(\sigma) = c + d - c + d = 2d$, então σ não é um ciclo e $Z_2(\mathbb{K}^2) = \{\emptyset\}$. Por outro lado, $B_2(\mathbb{K}^2) = \{\emptyset\}$, pois não existem 3-células. Assim,

$$H_2(\mathbb{K}^2) = Z_2(\mathbb{K}^2) \simeq 0.$$

Vamos calcular $H_1(\mathbb{K}^2)$. Note que $C_1(\mathbb{K}^2) = \{kc + ld : k, l \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Além disso, $\partial(c) = \partial(d) = Q - Q = \emptyset$, então $Z_1(\mathbb{K}^2) = \{kc + ld : k, l \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por outro lado, $\partial(\sigma) = 2d$, o grupo de homologia $2d \sim 0$. Assim,

$$H_1(\mathbb{K}^2) = \{kc + ld : k, l \in \mathbb{Z} \text{ e } 2d = 0\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Vamos calcular $H_0(\mathbb{K}^2)$. Note que $C_0(\mathbb{K}^2) = \{kQ : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Além disso, $\partial(Q) = \emptyset$, então Q é um 0-ciclo e $Z_0(\mathbb{K}^2) = \{kQ : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Por outro lado, $\partial(c) = \emptyset$ e $\partial(d) = \emptyset$, então $B_0(\mathbb{K}^2) = \{\emptyset\} \simeq 0$. Assim,

$$H_0(\mathbb{K}^2) = Z_0(\mathbb{K}^2) \simeq \mathbb{Z}.$$

Uma característica adicional dos grupos de homologia, com relação a característica de Euler, é que $H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$ e $H_2(\mathbb{K}^2) = 0$, ou seja, os grupos de homologia do toro e da garrafa de Klein são distintos. Em cada dimensão, $H_k(K)$ nos dá uma parte da informação relativa as propriedades determinadas em cada dimensão. O grupo $H_0(K)$ mede a conectividade do complexo K , se, por exemplo, $H_0(K) = \mathbb{Z}^n$, então n é o número de componentes conexas de K . O grupo $H_1(K)$ conta o número de loops não triviais e $H_2(K)$ conta o números de buracos e cavidades em dimensão 2.

Teorema 2.53 Seja S uma superfície compacta conexa e sem fronteira. Se S é orientável, então $H_2(K) \simeq \mathbb{Z}$. Se S não é orientável, então $H_2(S) \simeq 0$.

Demonstração: Considere uma triangulação da superfície S . Sejam σ e τ dois 2-simplices adjacentes com aresta em comum a . Se eles tem a mesma orientação, então a aresta a é cancelada na soma $\sigma + \tau$. Entretanto, se eles tem orientação oposta, então $\pm 2a$ está na fronteira de $\sigma + \tau$. Note que os 2-simplices em K não tem a mesma orientação se, e somente se, $|K|$ contém uma faixa de Möbius. Assim, se todos os 2-simplices de K podem ser orientados, então eles tem a mesma orientação, logo K será um complexo em uma superfície orientável, ou uma esfera ou a soma conexa de toros. Considere a 2-cadeia C soma de todos os 2-simplices em K . Como cada aresta em K é fronteira de exatamente dois triângulos os triângulos tem orientação compatível, temos que $\partial(C) = \emptyset$ e C é um ciclo. Como não existem 3-células, o segundo grupo de homologia é

$$H_2(S) = \{kC : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, se K contém uma faixa de Möbius, então K é um complexo em uma superfície não orientável, a qual é a soma conexa de planos projetivos. Seja C um 2 -ciclo em K . Se σ é um simplexo em C , então todos os triângulos adjacentes a σ estão em C desde que $\partial(C) = \emptyset$, e então existe uma célula γ tal que $\gamma + \sigma = \emptyset$. Logo, C contém todas as 2-células de K , mas algumas não possuem orientação compatível, algumas arestas não se cancelam. Assim, C não é um ciclo, portanto

$$H_2(S) = \{\emptyset\} \simeq 0.$$

□

A Tabela (2.3) nos fornece os grupos de homologia de algumas superfícies.

Variedade	H_2	H_1	H_0
S^2	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
T^2	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	\mathbb{Z}
K^2	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$	\mathbb{Z}
P^2	0	$\mathbb{Z}/2$	\mathbb{Z}
S^1	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
Cilindro	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
Faixa de Möbius	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
Disco	0	0	\mathbb{Z}

Tabela 2.3: Grupos de homologia de algumas superfícies.

Note que para diferentes superfícies, por exemplo, S^1 e o Cilindro, podemos ter os mesmos grupos de homologia.

Novos complexos podem ser construídos com um grupo de homologia desejado, contando que eles sejam combinações dos grupos apresentados na Tabela (2.3), usando os seguintes teoremas.

Teorema 2.54 *Sejam K e L complexos simpliciais conexos com $K \cap L = \emptyset$. Seja $X = K \cup L$. Então, para $k = 0, 1, 2, \dots$*

$$H_k(X) = H_k(K) \oplus H_k(L)$$

O espaço $X = K \cup L$ formado é chamado de união disjunta de K e L .

Teorema 2.55 *Sejam K e L complexos simpliciais conexos com $K \cap L = \{P\}$, para algum vértice P . Seja $X = K \cup L$. Então, X é um complexo simplicial e*

$$H_k(X) = H_k(K) \oplus H_k(L), \text{ se } k > 0$$

$$H_k(X) = \mathbb{Z}, \text{ se } k = 0.$$

O espaço X formado é chamado de produto wedge ou união de um ponto e é denotado por $X = K \vee L$. O espaço $K \vee L$ é formado pela junção de K e L em um único ponto.

2.11 Números de Betti e a característica de Euler

Existe uma relação entre a característica de Euler e os grupos de cadeia, já que $C_k(K)$ é gerado pelas k -células. Denotaremos por $rk(C_k(K))$, é o número de k -células de K . Assim, para um n -complexo, temos

$$\chi(K) = rk(C_0(K)) - rk(C_1(K)) + \cdots + (-1)^n rk(C_n(K))$$

Porém, existe uma relação mais sutil entre os grupos de homologia e a característica de Euler; para explorar isso vamos considerar as seguintes proposições sobre grupos.

Proposição 2.56 *Seja G um grupo abeliano com um subgrupo H finitamente gerado. Então*

$$rk(G/H) = rk(G) - rk(H),$$

onde $rk(G) \doteq \#(\text{elementos da base})$.

Proposição 2.57 *Seja $f : G_1 \rightarrow G_2$ um homomorfismo entre os grupos G_1 e G_2 . Então,*

$$rk(ker(f)) + rk(Im(f)) = rk(G_1)$$

No que segue, denotaremos o k -ésimo homomorfismo de fronteira sobre os grupos de cadeia de um complexo K por

$$\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K).$$

Note que $Z_k(K) = ker(\partial_k)$ e $B_k(K) = Im(\partial_{k+1})$. Sejam

$$\begin{aligned}c_k &= rk(C_k(K)) \\z_k &= rk(Z_k(K)) \\b_k &= rk(B_k(K))\end{aligned}$$

Pela Proposição (2.57), para $k = 1, 2, \dots$, temos

$$c_k = z_k + b_{k-1} \quad (2.2)$$

Definição 2.58 O número de Betti de um complexo K é dado por

$$\beta_k = rk(H_k(K))$$

Assim, pela Definição (2.51) e pela Proposição (2.56), temos que

$$\beta_k = z_k - b_k. \quad (2.3)$$

Agora vamos apresentar o teorema que relaciona a característica de Euler e os números de Betti.

Teorema 2.59 Seja K um n -complexo. Então

$$\chi(K) = \beta_0 - \beta_1 + \cdots + (-1)^n \beta_n$$

Demonstração: Usando (2.2) e (2.3), temos que

$$\begin{aligned}\beta_0 - \beta_1 + \cdots + (-1)^n \beta_n &= (z_0 - b_0) - (z_1 - b_1) + \cdots + (-1)^n (z_n - b_n) \\&= z_0 - (b_0 + z_1) + (b_1 + z_2) + \cdots + (-1)^{n-1} (b_{n-1} + z_n) + (-1)^n b_n \\&= z_0 - c_1 + c_2 + \cdots + (-1)^{n-1} c_n + (-1)^n b_n\end{aligned}$$

Entretanto, para qualquer 0-cadeia C , $\partial(C) = \emptyset$, logo $Z_0(K) = C_0(K)$ e, então, $z_0 = c_0$. Além disso, o grupo $B_n(K) = \emptyset$, pois nenhuma n -cadeia em K , exceto \emptyset , pode ser fronteira, pois não existem $(n+1)$ -células. Eentão $b_n = 0$. Portanto,

$$\beta_0 - \beta_1 + \cdots + (-1)^n \beta_n = c_0 - c_1 + c_2 + \cdots + (-1)^{n-1} c_n = \chi(K)$$

□

Os números de Betti são invariantes topológicos que contém uma grande quantidade de informações. Eles podem ser combinados como no Teorema (2.59) para formar a característica de Euler. Além disso, pelo Teorema (2.59), note que se S é uma superfície orientada, $\beta_2 = 1$, e se S é não orientada, então $\beta_2 = 0$. Então β_2 determina a orientabilidade da variedade. O número de componentes conexas no espaço é dada por β_0 .

2.12 Invariância da homologia para superfícies

Gostaríamos de mostrar que os grupos de homologia de um complexo K depende somente do espaço subjacente $|K|$ e não da particular escolha do complexo.

A prova da invariância dos grupos de homologia para superfícies é muito semelhante a prova do Teorema (2.25) da invariância da característica de Euler. Vamos assumir que K é um 2 -simplexo representando uma superfície, então K é composto de polígonos identificados ao longo de suas arestas e vértices. Qualquer polígono pode ser subdividido em triângulos, e esses triângulos podem ser divididos novamente em um processo de subdivisão baricêntrica para formar uma triangulação da superfície. Vamos nomear esse complexo simplicial por K' , assim $|K| = |K'|$. Pelos Teoremas (2.16) e (2.18) sobre classificação de superfícies com e sem fronteira qualquer triangulação de uma superfície pode ser reduzido a um diagrama plano na forma padrão. Assim, para mostrar que os grupos de homologia não dependem do complexo K , deve-se mostrar que as transformações que levam K para K' não afetam os grupos de homologia.

Os teoremas sobre invariância serão apresentados a seguir.

Teorema 2.60 *Seja K um complexo e $K^{(1)}$ a subdivisão baricêntrica de K . Então,*

$$H_{\bullet}(K) \simeq H_{\bullet}(K^{(1)}).$$

Teorema 2.61 *Seja S um complexo dado pelo diagrama planar na forma padrão de uma superfície. Se K é um 2 -complexo tal que $|K|$ é homeomorfo a S , então*

$$H_{\bullet}(K) \simeq H_{\bullet}(S).$$

Corolário 2.62 *Se K e K' são 2 -complexos tais que $|K| = |K'| = S$ para alguma superfície S , então*

$$H_{\bullet}(K) \simeq H_{\bullet}(K').$$

O Teorema (2.61) e o Corolário (2.62) implicam que os grupos de homologia dependem, pelo menos para superfícies, somente do espaço subjacente e não do particular complexo usado para representar o espaço. Então, dois $2-complexos$ de uma superfície nos dão os mesmos grupos de homologia, então faz sentido escolher o mais simples.

O argumento chave do Corolário (2.62) é que K e K' são subdivisões de um mesmo diagrama planar. Podemos utilizar essa mesma ideia para obter o seguinte corolário.

Corolário 2.63 *Se K e K' são complexos com $|K| = |K'|$, e K e K' tem uma subdivisão comum K'' , então*

$$H_k(K) \simeq H_k(K').$$

No Corolário (2.63), o complexo K pode ser subdividido por uma sequência finita de subdivisões elementares para obtermos um complexo K'' , e, então, K'' pode ser “desmontado” utilizando as inversas das transformações elementares para obtermos K' . Então, a existência de uma subdivisão comum forma uma conexão entre ambos os complexos.

Para arbitrários $2-complexos$ (não somente superfícies), pode-se provar a invariância dos grupos de homologia usando o Corolário (2.63) e a versão bidimensional da famosa conjectura topológica apresentada a seguir.

Conjectura 2.64 *Quaisquer duas triangulações de um espaço topológico tem uma subdivisão comum.*

A Conjectura (2.64) foi provada para todos $2-complexos$ trianguláveis em 1963 por *Papakyriakopoulos*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Arnold, V., *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Massachusetts, 1978.
- [2] Croom, F. H., *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer, USA, 1978.
- [3] Fan, K., Fréchet, M., *Invitation to Combinatorial Topology*, Dover publications, New York, 1967.
- [4] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [5] Henle, M., *A combinatorial Introduction to Topology*, Dover publications, New York, 1994.
- [6] Hirsh, M., Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [7] Kinsey, L. Christine, *Topology of Surfaces*, Springer, USA, 1993.
- [8] Munkres, J.R., *Elements of Algebraic Topology*, Westview Press, Revised edition, 1993.
- [9] Munkres, J.R., *Topology*, Prentice Hall International, Incorporated, 2000.